Mp2i - Programme de colles 11

Semaine du 13 au 17 décembre 2021

1 Arithmétique dans Z

a) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, congruences. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, classes de congruence modulo n.

b) Bases de numérations.

c) Pgcd de deux entiers : définition, calcul par l'algorithme d'Euclide. Coefficients de Bézout, calcul par l'algorithme d'Euclide amélioré.

d) Entiers premiers entre eux. Divers résultats classiques, dont le th. de Gauss. Résolution des équations du type $ax + by = c$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. Forme irréductible d'un rationnel. Inverse modulo n, condition d'existence.

e) Ppcm de deux entiers. Lien avec le pgcd.

f) Généralisation du pgcd, ppcm à plusieurs entiers, entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux 2 à 2.

g) Nombres premiers, l'ensemble des nombres premiers est infini. Décomposition en facteurs premiers. Valuations p-adiques, condition de divisibilité et calcul du pgcd, ppcm à l'aide des décompositions en facteurs premiers.

h) Petit théorème de Fermat.

Démonstrations à connaître :

- résolution de l'équation $ax + by = c$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$
- existence de la décomposition primaire d'un entier
- unicité de la décomposition primaire
- petit théorème de Fermat