

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Toutes les fonctions considérées vont de \mathbb{R} dans un \mathbb{K} dans un premier temps. Dans un second temps, on généralisera les définitions et résultats à des fonctions de E dans F , deux e.v.n. de dimensions finies.

1 Convergence d'une suite de fonctions

Comme son nom l'indique, une suite de fonctions est une suite (f_n) où f_n est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{K} .

1.1 Convergence simple

Définition. Soit A une partie de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge.

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour chaque $x \in A$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée limite simple sur A de la suite (f_n) et on dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur A .

On observe la définition formelle de la convergence simple sur A :

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

le rang n_0 dépend à la fois de ε et de x .

Exercices :

- 1) Étudiez la convergence simple de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.
- 2) Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n(1+x^n)}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.

1.2 Convergence uniforme

Rappel. Si g est une fonction bornée sur une partie A de \mathbb{R} , on pose $\|g\|_\infty^A = \sup_{x \in A} |g(x)|$.

$\|\cdot\|_\infty^A$ est une norme sur le \mathbb{K} -e.v. des fonctions bornées sur A , appelée norme infinie ou norme uniforme sur A .

Un résultat essentiel : la majoration de la norme uniforme.

Proposition 1. Soit f une fonction bornée sur une partie A de \mathbb{R} et K un réel positif.

Alors on a l'équivalence

$$\|f\|_\infty^A \leq K \quad \iff \quad \forall x \in A \quad |f(x)| \leq K$$

Définition. Soit A une partie de \mathbb{R} , (f_n) et f une suite de fonctions et une fonction définies sur A .

On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A quand pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f - f_n$ est bornée sur A et la suite réelle $(\|f - f_n\|_\infty^A)$ converge vers 0.

La fonction f est alors appelée limite uniforme sur A de la suite (f_n) .

On observe la définition formelle de la convergence uniforme sur A :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

le rang n_0 dépend seulement de ε , mais plus de x : c'est le même n_0 pour toutes les valeurs de x , en ce sens il est uniforme.

Souvent, on ne sait pas calculer les normes uniformes des fonctions $f_n - f$. Une simple majoration suffit, qu'on appelle majoration uniforme.

Définition. Soit A une partie de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On appelle majoration uniforme sur A toute proposition du type

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in A \quad |f_n(x)| \leq K_n$$

où K_n est une constante indépendante de x

Exemples.

— La proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$$

est une majoration uniforme des fonctions $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$ sur \mathbb{R} .

— La proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{\sin(nx)}{n+x^2} \right| \leq \frac{1}{n+x^2}$$

n'est pas une majoration uniforme des fonctions $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n+x^2}$ sur \mathbb{R} , car le majorant dépend de x .

Exercices :

- 3) Donnez une majoration uniforme des fonctions $x \mapsto \frac{\ln(1+nx)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
- 4) Même exercice avec les fonctions $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$ sur $] -\pi, \pi[- \{0\}$.

Proposition 2. Avec les mêmes hypothèses, il y a équivalence entre

- la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A ;
- il existe une suite positive (α_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty^A \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- il existe une **majoration uniforme** des fonctions $f_n - f$ sur A par les **termes d'une suite numérique positive qui converge vers 0**, i.e. on a une proposition du type

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \text{et} \quad \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

où α_n ne dépend pas de x .

Il y a un lien entre la convergence simple et uniforme, dans un seul sens !

Théorème 1. Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur A , alors (f_n) converge simplement vers f sur A .

Mais la réciproque est fautive ! Contre-exemple : la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ où $f_n : x \mapsto x^n$.

Conséquence : pour étudier la convergence uniforme, on commence par étudier sa convergence simple, car d'abord on détermine la limite simple f puis une fois qu'on la connaît, on cherche à savoir si elle est limite uniforme.

Exercices :

- 5) Étudiez la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ ($n > 0$) sur $[0, b]$, où b est un réel positif, puis sur $[0, +\infty[$.
- 6) Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.
- 7) Même question avec la suite de fonctions $f_n : x \mapsto n^\alpha x^n (1-x)$ ($n > 0$) sur $[0, 1]$, où $\alpha > 0$.

Pour montrer la non-convergence uniforme, on dispose d'un critère simple suffisant dans bien des cas.

Proposition 3. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur une partie A de \mathbb{R} . S'il existe une suite (x_n) à termes dans A telle que la suite $(f(x_n) - f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0, alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur A .

Exercices :

- 8) Montrez que la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^2 \cos \frac{\pi x}{n}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction f à préciser. Montrez que la convergence n'est pas uniforme sur \mathbb{R} , mais qu'elle l'est sur tout segment $[0, a]$.

2 Convergence d'une série de fonctions

2.1 Convergence simple

Définition. Soit A une partie de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A quand la suite des sommes partielles

$\left(\sum_{k=0}^n f_k \right)$ converge simplement sur A .

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour chaque $x \in A$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée (fonction) somme sur A de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Exercices :

- 9) Étudiez la convergence simple de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{nx^2}{n^3 + x^2}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.
- 10) Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1 + x^n}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.
- 11) Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^3 + x^3}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.

2.2 Convergence uniforme

On a la même définition en remplaçant « simple » par « uniforme ».

Définition. Soit A une partie de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A quand la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^n f_k \right)$ converge uniformément sur A .

La fonction somme f est alors appelée limite uniforme sur A de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$.

Encore une fois, il y a un lien entre la convergence simple et uniforme, dans un seul sens !

Théorème 2. Si une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A , alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A .

Mais la réciproque est fautive ! Contre-exemple : la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[0, 1[$ où $f_n : x \mapsto x^n$.

On peut réécrire la définition à l'aide des restes partiels.

Proposition 4. La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur A quand

la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur A

et la suite des restes partiels $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right)$ converge uniformément vers 0 sur A , i.e. $\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty}^A \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Il suffit donc qu'il existe une suite positive (α_n) telle que $\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty}^A \leq \alpha_n$ et $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour que la série

$\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers f sur A .

Autrement dit, il suffit de trouver une **majoration uniforme** des restes partiels par les **termes d'une suite positive qui converge vers 0**.

Exercices :

12) Étudiez la convergence uniforme de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.

13) Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.

De manière analogue aux séries numériques, on note le lien entre la convergence uniforme d'une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ et la convergence uniforme de la suite (u_n) .

Proposition 5. Soit A une partie de \mathbb{R} , (u_n) une suite de fonctions définies sur A .

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur A , alors la suite (u_n) converge uniformément vers 0.

Évidemment, la réciproque est fautive.

2.3 Convergence normale

Ce dernier type de convergence est spécifique aux séries de fonctions.

Définition. Soit A une partie de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur A quand la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^A$ converge.

Souvent, on ne sait pas calculer les normes uniformes des fonctions f_n . Une simple majoration suffit.

Proposition 6. Avec les mêmes hypothèses, il y a équivalence entre

— la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur A

— il existe une suite positive (α_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_{\infty}^A \leq \alpha_n$ et la série $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ converge.

— il existe une **majoration uniforme** des fonctions f_n sur A par les **termes d'une série positive convergente**.

Exercices :

14) Étudiez la convergence normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{1+n^3x^3}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$.

15) Étudiez la convergence normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{nx^2}{n^3+x^2}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$, à défaut sur des parties plus petites.

16) Même question avec la série de fonctions $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^\alpha(1+x^n)}$ ($n > 0$) sur $[0, +\infty[$, où $\alpha > 0$.

Il y a un lien entre la convergence uniforme et normale, dans un seul sens !

Théorème 3. *Si une série de fonctions converge normalement sur A , alors elle converge uniformément sur A . Elle converge aussi absolument sur A .*

Mais la réciproque est fautive !

Exercices :

- 17) Contre-exemple : montrez que la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} f_n$ sur $[0, 1]$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{\ln n} - \frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ mais pas normalement.

En pratique, il est souvent plus simple de montrer la convergence normale que la convergence uniforme d'une série. Donc on commence d'abord par étudier la convergence simple, puis la convergence normale et en cas d'échec, la convergence uniforme.

3 Propriétés de la fonction limite

3.1 Monotonie

Proposition 7. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I .*

Si la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur I , alors f est croissante sur I .

On a évidemment le même résultat avec l'hypothèse et la conclusion de décroissance.

3.2 Continuité

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f sur A .

En général, même si les fonctions f_n sont des fonctions continues, on ne peut rien affirmer à propos de la continuité de f . Contre-exemple : la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)$ sur $[0, 1]$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que f soit continue sur A .

Théorème 4. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I .*

- *Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I*
- *et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ,*

alors f est continue sur I .

On en déduit la version correspondante de ce théorème sur les séries de fonctions.

Corollaire 1. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I .*

- *Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I*
- *et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ,*

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Exercices :

- 18) Montrez que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ est définie sur \mathbb{R} et qu'elle y est continue.
- 19) Même exercice avec $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ est définie sur \mathbb{R}_+ et qu'elle y est continue.
- 20) Montrez que la fonction $f : x \mapsto e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{e^x}{n^2}\right)$ est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$, que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que $\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\arctan \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2} \ln(1+n^4) \right]$.

La continuité étant une propriété locale, il est souvent inutile d'avoir une convergence uniforme globale pour conclure. En général, on peut se contenter de convergence uniforme sur des parties plus petites que I , en général les segments inclus dans I , ou toute famille recouvrante d'intervalles de I .

Définition. Soit A un intervalle.

Une famille \mathcal{F} d'intervalles de A est dite recouvrante quand $A = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ et $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} \overset{\circ}{X}$.

Exemples.

- Si $A = [m, +\infty[$, alors la famille des segments $[m, a]$ est recouvrante : $A = \bigcup_{a > m} [m, a]$.
- Si $A =]m, +\infty[$, alors la famille des sous-intervalles $[a, +\infty[$ est recouvrante : $A = \bigcup_{a > m} [a, +\infty[$.
- Si A est un intervalle, alors la famille des (vrais) segments inclus dans A est recouvrante : $A = \bigcup_{\substack{(a,b) \in A^2 \\ a < b}} [a, b]$.

On en déduit alors le théorème suivant, dont il vaut mieux à mon avis sur chaque exercice présenter le détail des idées.

Théorème 5. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I et \mathcal{F} une famille d'intervalles recouvrant I .

- Si pour toute partie $X \in \mathcal{F}$, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur X
 - et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ,
- alors f est continue sur I .

En pratique, on choisit pour \mathcal{F} une familles d'intervalles adaptés au problème (voir les nombreux exemples en exercice).

Exercices :

- 21) Pour $x > 0$, on pose $u_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = \arctan(x + u_n(x))$.
Montrez que la suite $(u_n(x))$ converge vers un réel $\varphi(x)$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{x + \pi/2}{(1 + x^2)^n}$.
Déduez-en que φ est continue sur $]0, +\infty[$.
- 22) Montrez que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1 + nx)}{n^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

3.3 Intervertion de limite et d'intégrales

Nous avons déjà rencontré le problème d'intervertion de limite et d'intégrale dans le cadre du th. de convergence dominée.

Le théorème suivant donne une autre condition suffisante pour que cela soit faisable, à condition de travailler sur un segment !

Théorème 6. Soit a, b deux réels, (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$.

- Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$
 - et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$,
- alors f est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$$

Exercices :

- 23) Quelle est la limite de $\int_0^1 \frac{n \cos \frac{x}{n}}{n + x^n} dx$ quand $n \rightarrow +\infty$?
- 24) On pose $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$. Montrez que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Justifiez la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} f_n$ et déterminez leur limite quand $n \rightarrow +\infty$.

On rappelle qu'un symbole $\sum^{+\infty}$ est une limite : $\sum^{+\infty} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum^N$. Donc on ne peut pas intervertir sans précaution un symbole $\sum^{+\infty}$ et une intégrale.

Corollaire 2. Soit a, b deux réels, (f_n) une suite de fonctions définies sur $[a, b]$.

— Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

— et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$,

alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$, la série des intégrales $\sum_{n \geq 0} \int_a^b f_n$ est convergente et

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

On appelle aussi ce résultat le th. d'intégration terme à terme sur un segment.

Remarque. Ces deux théorèmes ne sont vrais que sur des segments, donc pour de vraies intégrales. Ils sont faux si on se place sur des intervalles autres et donc si on parle d'intégrales généralisées.

Exercices :

25) Montrez que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n}$ est définie et continue sur $[0, 1]$, puis justifiez $\int_0^1 f = \frac{-1}{4}$.

26) Montrez que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \int_0^1 \frac{1}{2-x} dx$ et donnez-en une valeur concrète.

3.4 Intertion de limites et de primitives

On a des résultats similaires pour des primitives.

Théorème 7. Soit I un intervalle, (f_n) une suite de fonctions définies sur I et a un point de I .

On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f sur I .

— Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I

— et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ,

alors f est continue sur I et la suite des primitives qui s'annulent en a (les fonctions $x \mapsto \int_a^x f_n$) converge uniformément sur tout segment vers la primitive de f qui s'annule en a (la fonction $x \mapsto \int_a^x f$).

3.5 Intertion de limites

De même, il est faux en général que $\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$: on ne peut pas en général intervertir deux limites.

Exemple. On pose pour $(x, n) \in [0, 1[\times \mathbb{N}$, $u_n(x) = \frac{x + x^n}{1 + nx^n}$.

D'une part, pour tout $x \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = x$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \right) = 1$.

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 1} u_n(x) = \frac{2}{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1} u_n(x) \right) = 0$.

Encore une fois, grâce à la convergence uniforme, c'est possible. Cependant, les résultats sont admis car plus difficiles à montrer : ce sont les théorèmes de double limite.

Théorème 8. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , a une extrémité de I (réelle ou infinie), (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

- Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I
- et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a pour limite finie ℓ_n en a ,

alors la suite (ℓ_n) a une limite finie ℓ et f a pour limite ℓ en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \ell$$

On en déduit la version correspondante de ce théorème sur les séries de fonctions.

Corollaire 3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , a une extrémité de I (réelle ou infinie), (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

- Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I
- et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n a pour limite finie ℓ_n en a ,

alors la série $\sum_{n \geq 0} \ell_n$ converge et en notant ℓ la somme de cette série, la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ a pour limite ℓ en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Exercices :

- 27) Montrez que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \arctan(nx)}{n^4}$ est définie et continue sur \mathbb{R} et déterminez la valeur de sa limite en $+\infty$ (on admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$).

3.6 Dérivabilité

La situation est encore plus délicate : une dérivée étant une limite, intervertir une dérivation et une limite est une opération en général impossible.

D'abord, la limite simple d'une suite de fonctions dérivables n'est pas forcément dérivable. Il est raisonnable de se dire que si on remplace la limite simple par une limite uniforme, comme dans les théorème précédents, on obtient le résultat.

Et bien non !

On peut montrer qu'il existe des suites de fonctions dérivables qui converge uniformément vers des fonctions non dérivables (difficilement, car il faut construire des fonctions qui sont continues mais dérivables nulle part).

De même, il existe une suite de fonctions dérivables (f_n) qui converge uniformément vers une fonction dérivable f , mais la suite des dérivées (f'_n) ne converge pas vers la dérivée f' : par exemple, la suite des fonctions $x \mapsto \frac{\sin nx}{n}$ sur $[\pi/4, 3\pi/4]$.

Pour obtenir un résultat vraiment utile, il faut supposer plus que dérivable, c'est-à-dire de classe C^1 , et imposer la convergence uniforme sur les dérivées.

Théorème 9. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

- Si les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I ,
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I ,
- et la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur I ,

alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et

$$f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$$

On en déduit la version correspondante de ce théorème sur les séries de fonctions.

Corollaire 4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

- Si les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I ,
- la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I ,
- et la série des dérivées $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur I

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

On appelle aussi ce résultat le th. de dérivation terme à terme.

Exercices :

28) Montrez que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{n^2}$ est définie et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. Que vaut $f'(1)$?

Remarque. Là encore, le caractère C^1 d'une fonction est une propriété locale. Donc tout ce qui a été signalé à propos de la continuité sur des parties d'une famille recouvrante reste valable. En pratique, on choisit des intervalles adaptés au problème.

Exercices :

29) La fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{n^2}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$ (voir exercice précédent). Montrez qu'elle est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

3.7 Dérivation à un ordre plus élevé

Théorème 10. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

- Si les fonctions f_n sont de classe C^k sur I ,
- pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite de fonctions $(f_n^{(j)})$ converge simplement sur I ,
- et la suite des dérivées k -èmes $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur I ,

alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$f^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(j)}$$

On en déduit la version correspondante de ce théorème sur les séries de fonctions.

Corollaire 5. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , (f_n) une suite de fonctions définies sur I .

- Si les fonctions f_n sont de classe C^k sur I ,
- pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I ,
- et la série des dérivées k -èmes $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$$

4 Généralisation

Dans cette section, E et F sont deux e.v.n. **de dimensions finies**, les fonctions considérées vont de E dans F . On étend sans peine les définitions de convergence simple et uniforme. Il suffit de remplacer les valeurs absolues ou modules par les normes.

4.1 Convergence simple

Définition. Soit A une partie de E , (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A quand pour tout $x \in A$, la suite vectorielle $(f_n(x))$ converge dans F .

Dans ce cas, on peut définir une fonction f sur A en posant, pour chaque $x \in A$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

La fonction f est alors appelée limite simple sur A de la suite (f_n) et on dit que la suite (f_n) converge simplement vers f sur A .

4.2 Convergence uniforme

Si g est une fonction bornée sur une partie A de E , on pose $\|g\|_\infty^A = \sup_{x \in A} \|g(x)\|$.

$\|\cdot\|_\infty^A$ est une norme sur le \mathbb{K} -e.v. des fonctions bornées sur A , appelée norme infinie ou norme uniforme sur A .

Définition. Soit A une partie de E , (f_n) et f une suite de fonctions et une fonction définies sur A .

On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A quand pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f - f_n$ est bornée sur A et la suite réelle $(\|f - f_n\|_\infty^A)$ converge vers 0.

La fonction f est alors appelée limite uniforme sur A de la suite (f_n) .

On adapte de même la définition de convergence uniforme d'une série de fonctions à valeurs dans F .

4.3 Convergence normale des séries

Définition. Soit A une partie de E , (f_n) une suite de fonctions définies sur A .

On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur A quand la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty^A$ converge.

Théorème 11. *Si une série de fonctions converge normalement sur A , alors elle converge uniformément (et donc aussi simplement) sur A .*

4.4 Résultats préservés

Tous les résultats sur la continuité, la double limite restent valables pour des fonctions de E dans F .

Tous les résultats sur la primitivation, l'intégration sur des segments, la dérivation C^1 ou plus généralement C^k restent valables pour des fonctions de \mathbb{R} dans F .

5 Approximation uniforme

5.1 Densité des fonctions en escaliers dans les fonctions continues par morceaux

On a déjà rencontré des exemples d'approximation uniforme en Première Année pour des fonctions à valeurs réelles. En travaillant sur les coordonnées, on peut généraliser ce résultat.

Théorème 12. *Toute fonction continue par morceaux sur un segment est approchable uniformément par des fonctions en escaliers.*

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans F . Alors il existe une suite de fonctions en escaliers sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Avec le vocabulaire des espaces vectoriels normés, on peut retraduire ce résultat.

Proposition 8. *Dans l'espace des fonctions bornées $\mathcal{B}([a, b], F)$, muni de la norme infinie, le sous-espace des fonctions en escaliers $\mathcal{E}([a, b], F)$ est dense dans le sous-espace des fonctions continues par morceaux $C_m^0([a, b], F)$.*

Autrement dit,

$$\forall f \in C_m^0([a, b], F) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in \mathcal{E}([a, b], F) \quad \|f - \varphi\|_\infty^{[a, b]} \leq \varepsilon$$

En application, un exercice classique, le lemme de Lebesgue (Centrale - Mines).

Exercices :

30) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. Montrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.

5.2 Densité des polynômes sur un segment dans les fonctions continues

Il s'agit du théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 13. *Toute fonction continue sur un segment est approchable uniformément par des fonctions polynômes.*

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{K} . Alors il existe une suite de fonctions polynômes sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Avec le vocabulaire des espaces vectoriels normés, on peut retraduire ce résultat (en identifiant les polynômes et les fonctions polynômes sur un segment, ce qui est loisible car un segment est un ensemble infini).

Proposition 9. *Dans l'espace des fonctions bornées $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$, muni de la norme infinie, le sous-espace des fonctions polynômes $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K}) = \mathbb{K}[X]$ est dense dans le sous-espace des fonctions continues $C^0([a, b], \mathbb{K})$.*

Autrement dit,

$$\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{K}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathbb{K}[X] \quad \|f - P\|_\infty^{[a, b]} \leq \varepsilon$$

En application, un exercice classique (banque CCINP).

Exercices :

31) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t) dt = 0$. Montrez que $f = 0$.