Dans cet exercice, n est un entier impair au moins égal à 3.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour $P \in E$, on pose $\phi(P) = P(1-X) + P(0)X^n$.

Q 1. Justifiez rapidement que ϕ est un endomorphisme de E et donnez sa matrice A dans la base canonique de E, puis donnez $\operatorname{tr}(\phi)$.

Q 2. Calculez A^2, déduisez-en que ϕ est un automorphisme de E.

Q 3. Montrez que $\operatorname{Sp}(\phi^2) = \{1, 2\}$ et déterminez les sous-espaces propres de ϕ^2 : l'endomorphisme ϕ^2 est-il diagonalisable ?

Q 4. Donnez un polynôme annulateur de ϕ de degré 4 et déduisez-en que ϕ est diagonalisable.

Q 5. Montrez que $\operatorname{Sp}(\phi) \subset \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Grâce à la trace et au déterminant de ϕ, montrez alors l'égalité des ensembles précédents et justifiez que $\dim \operatorname{sep}(f, 1) = \dim \operatorname{sep}(f, -1)$ et $\dim \operatorname{sep}(f, \sqrt{2}) = \dim \operatorname{sep}(f, -\sqrt{2})$.

Q 6. Montrez que $\operatorname{sep}(\phi, \sqrt{2}) \subset \operatorname{sep}(\phi^2, 2)$, déduisez-en que $\operatorname{sep}(\phi, \sqrt{2})$ est la droite vectorielle dirigée par $\sqrt{2}X^n + (1-X)^n$. Déterminez de même $\operatorname{sep}(\phi, -\sqrt{2})$.

Q 7. Déterminez les deux derniers sous-espaces propres de ϕ et précisez leurs dimensions.

Exercice hebdomadaire 8 - Corrigé

Q 1. ϕ est clairement linéaire, car l'évaluation en 0, la multiplication par un polynôme fixé et la composition à droite par un polynôme fixé sont linéaires. De plus pour tout $P \in E$, $\deg(P(1-X) = \deg P \leqslant n$ donc $\phi(P) \in E$. Donc $\phi \in \mathscr{L}(E)$.

$\phi(1) = 1 + X^n$ et pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\phi(X^k) = (1-X)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i X^i$ donc la matrice $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \dots & -n \\ 0 & 0 & 1 & 3 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{tr}(\phi) = 0$.

Q 2. Il est plus simple de calculer ϕ^2 ! Pour tout $P \in E$, $\phi^2(P) = \phi(P(1-X)) + P(0)\phi(X^n)$ par linéarité de ϕ.

Donc $\phi^2(P) = P(1-(1-X)) + P(1-0)X^n + P(0)(1-X)^n = P(X) + P(1)X^n + P(0)(1-X)^n$.

Donc $\phi^2(1) = 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}(-1)^k X^k$ et pour $j \geqslant 1$, $\phi^2(X^j) = X^j + X^n$. Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ ? & 1 & 0 & & & 0 \\ ? & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ? & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\det(\phi^2) = 4$, donc $\det(\phi)^2 = 4$ donc $\det(\phi) \neq 0$ donc ϕ est un automorphisme de E.

Q 3. La matrice triangulaire précédente montre que sur sa diagonale, il n'y a que des 1 ou des 2, donc $\mathrm{Sp}(\phi^2) = \{1, 2\}$.

Pour tout $P \in E$,

$\phi^2(P) = 2P \iff P(X) + P(1)X^n + P(0)(1-X)^n = 2P(X) \iff P(X) = P(1)X^n + P(0)(1-X)^n$.

Ceci prouve que $\mathrm{sep}(\phi^2, 2) = \mathrm{vect}(X^n, (1-X)^n)$, espace de dimension 2.

$\phi^2(P) = P \iff P(X)+P(1)X^n+P(0)(1-X)^n = P(X) \iff P(1)X^n+P(0)(1-X)^n = 0 \iff P(0) = P(1) = 0$ car la famille $(X^n, (1-X)^n)$ est libre.

Ceci prouve que $\mathrm{sep}(\phi^2, 1) = \{P \in E \ / \ P(0) = P(1) = 0\} = X(1-X)\mathbb{R}_{n-2}[X]$, espace de dimension $n-1$.

Comme la somme des dimensions des 2 s.e.p. vaut $n+1 = \dim E$, on en déduit que ϕ^2 est diagonalisable.

Q 4. Un simple calcul analogue à un calcul précédent donne : $\phi^4(P) = P(X) + 3P(1)X^n + 3P(0)(1-X)^n$. Il est alors facile de trouver la relation $\phi^4(P) = 3\phi^2(P) - P$. Ceci étant vrai pour tout polynôme P, on en déduit que $\phi^4 - 3\phi^2 + 2\mathrm{Id}_E = 0$, donc que le polynôme $X^4 - 3X^2 + 2$ est annulateur de ϕ.

Or $X^4 - 3X^2 + 2 = (X-1)(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ est scindé à racines simples, donc ϕ est diagonalisable.

Q 5. Le polynôme annulateur précédent donne aussi l'information $\mathrm{Sp}(\phi) \subset \{1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ (les valeurs propres font partie des racines de tout polynôme annulateur).

Si ϕ n'avait que des valeurs propres dans $\{-1, 1\}$, alors son déterminant serait ± 1 or d'après **Q 2**, il vaut ± 2, donc parmi les valeurs propres il y a $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$. De même si ϕ n'avait que des valeurs propres parmi $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, alors comme $\dim E \geqslant 3$, $|\det \phi| \geqslant 2\sqrt{2}$, ce qui contredit **Q 2**. Donc parmi les valeurs propres, il y a 1 ou -1.

La trace de ϕ est de la forme $a \times 1 + b \times (-1) + c \times \sqrt{2} + d \times (-\sqrt{2}) = 0$ où a, b, c, d sont quatre entiers naturels tels que $a + b \geqslant 1$ et $c + d \geqslant 1$. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, cela entraîne que $a = b \geqslant 1$ et $c = d \geqslant 1$. Donc les quatre nombres $1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ sont valeurs propres de ϕ.

Q 6. Si $P \in \mathrm{sep}(\phi, \sqrt{2})$, alors $\phi(P) = \sqrt{2}P$ donc $\phi^2(P) = (\sqrt{2})^2 P = 2P$: ceci prouve l'inclusion $\mathrm{sep}(\phi, \sqrt{2}) \subset \mathrm{sep}(\phi^2, 2)$. Donc si $P \in \mathrm{sep}(\phi, \sqrt{2})$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = aX^n + b(1-X)^n$ d'après **Q 3**, donc $\phi(P) = a(1-X)^n + 2bX^n$. On a alors $a(1-X)^n + 2bX^n = \sqrt{2}(aX^n + b(1-X)^n)$ donc comme la famille $(X^n, (1-X)^n)$

est libre, on en déduit $a = b\sqrt{2}$, donc $P = b(\sqrt{2}X^n + (1-X)^n)$. Réciproquement, une simple vérification montre que ces vecteurs sont bien dans $\text{sep}(\phi, \sqrt{2})$.

Donc $\text{sep}(\phi, \sqrt{2})$ est la droite vectorielle dirigée par $\sqrt{2}X^n + (1-X)^n$. De même, $\text{sep}(\phi, -\sqrt{2})$ est la droite vectorielle dirigée par $-\sqrt{2}X^n + (1-X)^n$.

Q 7. De même, $\text{sep}(\phi, 1) \subset \text{sep}(\phi^2, 1)$ et $\text{sep}(\phi, -1) \subset \text{sep}(\phi^2, 1)$.

Si $P \in \text{sep}(\phi, 1)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $P = X(1-X)Q(X)$, donc pour avoir $\phi(P) = P$, il faut que $Q(1-X) = Q(X)$. Et une simple vérification montre que cette condition est suffisante, donc

$\text{sep}(\phi, 1) = \{X(1-X)Q \;/\; Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \text{ et } Q(1-X) = Q(X)\}$

et de même, $\text{sep}(\phi, 1) = \{X(1-X)Q \;/\; Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \text{ et } Q(1-X) = -Q(X)\}$.

De plus, il a été montré en **Q 5** qu'il y avait autant de valeurs propres $\sqrt{2}$ que de $-\sqrt{2}$, donc ces deux sous-espace propres ont la même dimension, égales à $\dfrac{\dim \mathbb{R}_{n-2}[X]}{2} = \dfrac{n-1}{2}$.