On pose $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \ / \ f(0) = 0\}$.

Q 1. Expliquer en deux lignes maximum pourquoi E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Q 2.

a) Pour $f \in E$, on définit la fonction $Q(f)$ par $Q(f)(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, *a priori* définie sur $]0,1]$. Justifier qu'elle est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

b) On pose maintenant $T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x Q(f)(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que T est un endomorphisme de E.

Q 3. On note $\|f\| = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

a) Montrez que $\| \ \|$ est une norme sur E.

b) Montrez que T est continue sur E et que sa norme subordonnée vaut 1.

Q 4. Déterminez les valeurs propres de T et les vecteurs propres associés (on pourra faire intervenir des équations différentielles). L'endomorphisme T est-il injectif ?

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul, $F_n = E \cap \mathbb{R}_n[X]$ (on identifie les polynômes et les fonctions polynômes dans cet exercice).

Q 5. Montrez que F_n est un sous-espace stable par T. En notant T_n l'endomorphisme induit par T dans F_n, déterminez la trace et le déterminant de T_n.

Exercice hebdomadaire 7 - Corrigé

Q 1. $H = C^1([0,1],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel connu et l'application $f \mapsto f(0)$ est linéaire de H dans $\mathbb{R}$: E est son noyau donc est un sous-espace vectoriel de H, donc E est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Q 2.

a) Sur $]0,1]$, $Q(f)$ est continue comme quotient de fonctions continues. Pour $x \neq 0$, $Q(f)(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0)$ donc on peut prolonger $Q(f)$ par continuité en 0 en posant $Q(f)(0) = f'(0)$.

b) Pour tout $f \in E$, la question précédente permet de justifier l'existence de $T(f)$, puisque toute fonction continue sur $[0,1]$ possède une primitive : $T(f)$ est la primitive de $Q(f)$ qui s'annule en 0, donc $T(f) \in E$ (une primitive d'une fonction continue est de classe C^1). La linéarité de T découle immédiatement de celles de l'intégrale et de l'évaluation en un point.

Q 3.

a) Pour $f \in E$, f' est continue sur le segment $[0,1]$, qui est un compact, donc d'après le th. des bornes atteintes, f' est bornée sur $[0,1]$, ce qui justifie l'existence dans $\mathbb{R}$ du symbole $\|f\|$.

La suite est ultra-classique ! Je la refais entièrement pour la dernière fois !

— Soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant |f'(t)| \leqslant \|f\| = 0$ donc pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t) = 0$: f est donc une fonction constante. Mais comme $f(0) = 0$, elle est donc la fonction nulle.

— Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, la multiplication par le réel positif λ est croissante donc elle conserve les inégalités donc en particulier les maximums et les bornes supérieures :

$$\|\lambda f\| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda f'(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda|.|f'(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| = |\lambda|\|f\|.$$

— Soit $(f,g) \in E^2$, pour tout $t \in [0,1]$, $|(f+g)'(t)| = |f'(t)+g'(t)| \leqslant |f'(t)| + |g'(t)| \leqslant \|f\| + \|g\|$. Ceci prouve donc que $\|f\| + \|g\|$ est un majorant de la fonction $|(f+g)'|$ sur $[0,1]$. Comme $\|f+g\|$ est le plus petit des majorants de cette fonction, on en déduit que $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$.

b) Soit $f \in E$. Pour tout $x \in]0,1]$, $T(f)'(x) = Q(f)(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ donc $|T(f)'(x)| = \left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant \sup\limits_{[0,1]} |f'|$ d'après l'inégalité des accroissements finis. Et $T(f)'(0) = Q(f)(0) = f'(0)$, donc $|T(f)'(0)| \leqslant \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

On a donc montré : pour tout $x \in [0,1]$, $|T(f)'(x)| \leqslant \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

Donc on en déduit $\|T(f)\| \leqslant \|f\|$. Comme T est linéaire, ceci prouve que T est continue sur E.
De plus, dans l'inégalité précédente, il y a égalité quand f est la fonction identité. Donc la norme subordonnée de T vaut exactement 1.

Q 4. Soit λ une valeur propre de T et f un vecteur propre associé. Alors $f \neq 0$ et $T(f) = \lambda f$, donc en particulier $T(f)' = \lambda f'$.

Donc pour tout $x \in]0,1]$, $\dfrac{f(x)}{x} = \lambda f'(x)$: f est donc solution de l'équation différentielle $\lambda x y' - y = 0$. On en déduit $\lambda \neq 0$ (sinon on a $f = 0$).
On en déduit ensuite que f est de la forme $x \mapsto \mu e^{\frac{1}{\lambda}\ln x}$, c'est-à-dire $x \mapsto \mu x^{\frac{1}{\lambda}}$. Or f doit avoir pour limite 0 en 0 par continuité, donc il est nécessaire que λ soit strictement positif. Et f' doit avoir une limite réelle en 0 (rappel : f doit être de classe C^1 sur $[0,1]$), donc il est nécessaire que $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant 1$, c'est-à-dire $\lambda \leqslant 1$.
Réciproquement, un simple calcul de vérification montre que pour tout $\lambda \in]0,1]$, la fonction $g_\lambda : x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}}$ appartient à E et vérifie bien l'égalité $T(g_\lambda) = \lambda g_\lambda$. Donc on a trouvé les valeurs propres de T : les réels $\lambda \in]0,1]$, et les sous-espaces propres associés à chacune d'elles : les droites vectorielles $\mathrm{vect}(g_\lambda)$.
Enfin, 0 n'est pas valeur propre de T donc T est injectif.

Q 5. D'abord, on note que $F_n = \mathrm{vect}(X, X^2, \ldots, X^n)$. Puis grâce aux calculs précédents, on peut remarquer qu'en prenant $\lambda = \dfrac{1}{p}$ où $p \in [\![1,n]\!]$, on a $T(X^p) = \dfrac{1}{p}X^p$, ce qui prouve que $T(F_n) \subset F_n$.

De plus, dans la base $\mathscr{B} = (X, X^2, \ldots, X^n)$ de F_n, la matrice de T_n est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{tr}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\det(T_n) = \dfrac{1}{n!}$.