Mpi - Programme de colles 10

Semaine du 2 au 7 décembre 2024

1 Réduction des endomorphismes

a) Valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme. Lien entre les valeurs propres et les racines d'un polynôme annulateur. Sous-espaces propres. Les sous-espaces propres sont en somme directe.

   Dans toute la suite, les espaces sont de dimension finie.

b) Polynôme caractéristique, lien entre ses racines et les valeurs propres. Ordre de multiplicité d'une valeur propre, lien avec la dimension du sous-espace propre associé. Endomorphisme scindé, lien entre les valeurs propres et la trace ou le déterminant de l'endomorphisme.

c) Transposition du vocabulaire précédent aux matrices et résultats associés.

d) Diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice : définition (existence d'une base de vecteurs propres). Caractérisations équivalentes :
   — existence d'une matrice diagonale dans une base / d'une matrice diagonale semblable ;
   — les sous-espaces propres sont supplémentaires, ce qui se lit sur la somme des dimensions des sous-espaces-propres ;
   — l'endomorphisme est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée
   — existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples
   — le polynôme minimal est scindé à racines simples.

   Cas particuliers des endomorphismes / matrices ayant n valeurs propres distinctes.

   Lemme des noyaux. L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est lui-même diagonalisable.

e) Application de la diagonalisabilité : calcul des puissances, suites récurrentes linéaires, sous-espaces stables.

f) Trigonalisation : tout endomorphisme scindé est trigonalisable. Théorème de Cayley-Hamilton. Pratique en dimensions 2 et 3 de la trigonalisation : aucune technicité n'est attendue.

g) Sous-espaces caractéristiques. Si un endomorphisme est scindé, il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieure à diagonale constante.

h) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes. L'indice de nilpotence est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace. Caractérisation des nilpotents par leur polynôme caractéristique, par leur unique valeur propre dans le cas scindé.