**RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES**

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

Dans tous les exercices de cette série, la lettre $n$ désigne un entier naturel au moins égal à 2.

****1)**

a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P$ non constant : on note $a_1, \dots, a_m$ les racines distinctes de $P$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ leurs ordres de multiplicité. Rappelez la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

b) Application : déterminez les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $f(P) = (2X+1)P-(X^2-1)P'$. On rappelle que la décomposition en éléments simples est unique.

c) Même question avec $f(P) = (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$.

****2)** Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit l'application $\varphi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la façon suivante : $\varphi(f)(0) = f(0)$ et pour tout $x \in ]0,1]$, $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

a) Montrez que $\varphi$ est un endomorphisme de $E$.

b) Montrez que 0 n'est pas valeur propre de $\varphi$.

c) Montrez que 1 est valeur propre et donnez le sous-espace propre associé.

d) Déterminez les autres valeurs propres.

****3)** Soit $A$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in K$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = \lambda M + \mathrm{tr}(M)A$.

a) Justifiez rapidement que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Déterminez un polynôme annulateur de $f$ de degré 2.

c) Déduisez-en les éléments propres de $f$.

d) À quelle condition l'endomorphisme $f$ est-il inversible ?

****4)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = AM$.

Montrez que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$. Pour toute valeur propre $\lambda$, donnez une relation entre les dimensions des sous-espaces propres $\mathrm{sep}(f, \lambda)$ et $\mathrm{sep}(A, \lambda)$.

****5)** (Matrices stochastiques)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **stochastique,** c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

a) Montrez que 1 est valeur propre de $A$.

b) Montrez que toutes les valeurs propres complexes de $A$ sont de module inférieur ou égal à 1.

c) On suppose que $A$ est **strictement stochastique,** c'est-à-dire que $A$ est stochastique et que ses coefficients sont strictement positifs. Montrez que 1 est la seule valeur propre de $A$ de module 1.

****6)** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$, $A = \begin{pmatrix} 0 & & a \\ & \ddots & \\ b & & 0 \end{pmatrix}$.

a) On pose $J$ la matrice remplie de 1. Montrez que $t \mapsto \det(XI_n - A - tJ)$ est une fonction polynôme en $t$ de degré au plus 1, puis calculez $\det(XI_n - A - tJ)$ en fonction de $t$.

b) Montrez que le polynôme caractéristique de $A$ est $\dfrac{1}{b-a}\left(b(X+a)^n - a(X+b)^n\right)$.

c) Montrez que si $b = -a$, alors les images dans $\mathbb{C}$ des valeurs propres de $A$ sont sur une droite que vous préciserez, sinon elles sont sur un cercle.

****7)** Soit $n \geqslant 2$, $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = U.U^{\mathsf{T}}$. On note $U^{\mathsf{T}}.U = (s)$ qui est une matrice carrée à un seul élément.

a) Montrez que le polynôme $X^2 - sX$ est annulateur de $A$. Déduisez-en que $A$ a au maximum deux valeurs propres.

b) Quel est le rang de $A$ ? Précisez les valeurs propres de $A$.

c) Déterminez le polynôme caractéristique de $A$.

d) Déterminez les sous-espaces propres de $A$.

***8)** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez le polynôme caractéristique de $A$.

b) Déduisez-en sans calcul supplémentaire que $A$ est diagonalisable.

c) Déterminez les sous-espaces propres de $A$.

d) Diagonalisez $A$, c'est-à-dire explicitez une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonales telles que $A = PDP^{-1}$.

e) Calculez $A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

***9)** Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.

a) Calculez efficacement le rang de $B$. Déduisez-en une valeur propre de $B$ ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.

b) Démontrez *sans calculer le polynôme caractéristique* que $B$ admet une autre valeur propre, et qu'elle est simple.

c) Déduisez-en le polynôme caractéristique de $B$.

d) La matrice $B$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donnez une base de vecteurs propres.

***10)** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$.

***11)** Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

***12)** Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur le triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

***13)** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas de la forme $\lambda I_2$.

Montrez que $A$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ si et s.si $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

À quelle condition $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ?

****14)** Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

On recherche les (éventuelles) **racines carrées de** $A$, c'est-à-dire les matrices $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

a) Montrez que $A$ est diagonalisable et déterminez une matrice $D$ diagonale semblable à $A$ avec le moins de calculs possibles.

b) Soit $S \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ une racine carrée de $D$. Montrez que $S$ et $D$ commutent. Puis montrez que $S$ est diagonale.

c) Déterminez les racines carrées $S$ de $D$.

d) Déduisez-en toutes les racines carrées $R$ de la matrice $A$. Combien y en a-t-il ? Pourquoi ?

e) Énoncez des conjectures quant au nombre de racines carrées d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ plus générale, en discutant selon la nature de ses éléments propres.

****15)** Soit $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonalisez la matrice $A$.

b) On suppose que $F$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ stable par $u$. Montrez que $F$ est engendré par une famille de vecteurs propres de $u$.

c) Déterminez tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par $u$ : il y en a 8.

****16)** Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 2 \\ -6 & -18 & -5 \end{pmatrix}$ :

a) montrez que les droites stables par $u$ sont les droites $\mathrm{vect}((1,-1,3))$ ou $\mathrm{vect}((a,b,-a-3b))$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ;

b) montrez que les plans stables par $u$ sont les plans d'équation $ax + (4a+3b)y + (a+b)z$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

****17)** Montrez que les suites $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante sont combinaisons linéaires de 3 suites géométriques réelles $(\alpha^n)$, $(\beta^n)$ et $(\gamma^n)$ : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = -\frac{5}{12}u_{n+2} + \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{12}u_n$.

Déterminez à quelle condition sur $(u_0, u_1, u_2)$ ces suites sont convergentes.

****18)** Même exercice avec $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = \frac{3}{2}u_{n+2} - \frac{3}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n$ en prenant des suites géométriques complexes.

Montrez que les suites $(u_n)$ sont combinaisons linéaires réelles de trois suites réelles simples que l'on précisera. Déterminez à quelle condition sur $(u_0, u_1, u_2)$ ces suites sont convergentes.

****19)** Soit $p$ un entier naturel non nul, $E$ un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie et $f \in GL(E)$.
Montrez que $f$ est diagonalisable si et seulement si $f^p$ est diagonalisable.

Est-ce encore vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$ ?

****20)** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrez que si $f$ est diagonalisable, alors $f^2$ est diagonalisable et $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$.

b) Montrez que si $\lambda$ est une valeur propre de $f^2$ non nulle et $\mu$ une racine carrée de $\lambda$, alors $\mathrm{sep}(f^2, \lambda) = \mathrm{Ker}(f - \mu\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mu\mathrm{Id})$.

c) Montrez que la réciproque du **a.** est vraie.

****21)** Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? Donnez alors quand c'est possible une matrice triangulaire supérieure semblable.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

****22)** Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez le polynôme caractéristique de $C$. Est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ?

b) Déterminez les éléments propres de $C$.

c) Montrez que la matrice $C$ est semblable à la matrice $T$. On pourra considérer l'endomorphisme $u$ canoniquement associé à $C$ et construire, par analyse-synthèse, une base $\mathscr{B}$ où la matrice de $u$ est $T$.

d) Montrez que $T$ peut s'écrire $D + N$, où $D$ est diagonale, $N$ est nilpotent et $D$ et $N$ commutent. Déduisez-en $T^k$, puis $C^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

e) On considère trois suites $(x_k), (y_k), (z_k)$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{k+1} = \phantom{-}2x_k - 3y_k - z_k \\ y_{k+1} = \phantom{-2}x_k - 2y_k - z_k \\ z_{k+1} = -2x_k + 6y_k + 3z_k. \end{cases}$$

Explicitez $x_k$, $y_k$, $z_k$ en fonction de $k$ et de $x_0, y_0, z_0$.

****23)** (Spectre d'un polynôme d'une matrice) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

a) Montrez que la matrice $Q(M)$ est également diagonalisable. Exprimez le spectre de $Q(M)$ en fonction des valeurs propres de $M$.

b) Précisez les sous-espaces propres de $Q(M)$.

c) Ces résultats restent-ils valables si $M$ est seulement trigonalisable ? Sans hypothèse sur $M$ ?

****24)** Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant : $\quad u^2 + u + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{0}$.

a) Soit $F$ un sous-espace stable par $u$ et $x \notin F$. Montrez que $\Pi_x = \mathrm{vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan, qu'il est stable par $u$ et en somme directe avec $F$.

b) Montrez qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de $u$ est diagonale par blocs, de blocs $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Qu'en déduisez-vous concernant $n$ ?

c) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de $u$ dans la base canonique. Réduisez $A$ dans $\mathbb{C}$.

d) Retrouvez que $A$ est $\mathbb{R}$-semblable à une matrice diagonale par blocs, de blocs $R$.

****25)** Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On note $C(f)$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de $E$ commutant avec $f$.

a) Démontrez que $g \in C(f)$ si et seulement si les sous-espaces propres de $f$ sont stables par $g$.

b) Déduisez-en que $\dim C(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \omega_\lambda^2$, où $\omega_\lambda$ désigne la multiplicité de la valeur propre $\lambda$.

c) On suppose que les valeurs propres de $f$ sont simples. Démontrez que $(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $C(f)$.

****26)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que $A$ est nipotente si et s.si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(A^k) = 0$.

*****27)** Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrez que $A^{12} = I_2$.

****28)** Applications de la réduction des matrices à l'étude topologique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrez que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrez que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez la même chose avec l'ensemble $D_n^+(\mathbb{C})$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont distinctes. Montrez que l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$ est $D_n^+(\mathbb{C})$.

c) Montrez que $D_2(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

d) Montrez que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé et qu'il est l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$.

*****29)** Soit $A, B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrez que si l'une des deux matrices est inversible, alors $AB$ et $BA$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

b) Montrez que le résultat reste vrai même sans supposer l'une des deux inversibles.

*****30)** On note comme d'habitude $(E_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle qu'une matrice de transvection de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ où $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrez que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

b) Montrez que $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

c) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrez qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $U_1, \dots, U_k$ $k$ matrices de transvections telles que $D = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \det A) = U_1 \dots U_k A$. *Vous pourrez étudier plus finement les opérations effectuées lors d'un pivot de Gauss, voir cours de Première Année.*
Déduisez-en un chemin continu $\varphi$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui relie $A$ à $D$ (*i.e.* $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = D$) et qui laisse le déterminant invariant.

d) Déterminez alors les composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$.

*****31)** On travaille dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle matrice extraite de $A$ toute matrice obtenue à partir de $A$ en supprimant le même nombre de lignes et de colonnes (pas forcément les mêmes) : il s'agit donc d'une matrice carrée.

a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $r \in [\![1,n]\!]$. Montrez que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
- ▷ $\mathrm{rg}\, A = r$
- ▷ il existe une matrice inversible extraite de $A$ appartenant à $\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et pour tout $s > r$, toute matrice extraite de $A$ appartenant à $\mathscr{M}_s(\mathbb{K})$ n'est pas inversible.

b) Soit $r \in [\![1,n]\!]$. Montrez que l'ensemble des matrices de rang $\leqslant r$ est un fermé et qu'il est l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang égal à $r$.

**Oraux de concours**

**1) IMT** Soit $u$, $v$, $w$ trois suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n$, $v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n$, $w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n$. Exprimez $u_n, v_n, w_n$ en fonction de $n, u_0, v_0, w_0$.

**2) IMT** Déterminez les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**3) St-Cyr** Montrez que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donnez ses éléments propres.

**4) TPE** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminez un polynôme annulateur de degré 3 de $A$.
b) La matrice $A$ est-elle inversible ?
c) Est-elle diagonalisable ?
d) Montrez que les valeurs propres de $A^2$ sont négatives ou nulles.

**5) TPE** Montrez de deux façons différentes que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

**6) IMT** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez la limite quand $n \to +\infty$ de $\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{n} & \sin\dfrac{\alpha}{n} \\ \sin\dfrac{\alpha}{n} & \cos\dfrac{\alpha}{n} \end{pmatrix}^n$.

**7) IMT** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et 1 n'est pas valeur propre de $A$. Montrez que $A$ est diagonalisable.

**8) CCINP**

a) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrez que $\operatorname{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.
b) Pour $n \geqslant 3$, on pose $A$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux sités sur les quatre bords, égaux à 1. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.

**9) CCINP** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $A = (\alpha^{i+j-2})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Calculez le rang de $A$. Déduisez-en ses valeurs propres.
b) À quelle condition sur $\alpha$ la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

**10) CCINP** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M + 2M^{\mathrm{T}}$.

a) Déterminez les valeurs et vecteurs propres de $f$.
b) L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ? Calculez sa trace et son déterminant.

**11) Navale** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que 1 est la seule valeur propre de $M$ si et s.si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(M^k) = n$.

**12) Navale**

a) Diagonalisez la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$. Montrez que $B$ et $C$ sont semblables.

**13) CCINP** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

a) Exprimez le rang de $B$ en fonction du rang de $A$.
b) Trouvez une relation entre $\chi_A$ et $\chi_B$. Déduise-en le spectre de $B$ en fonction de celui de $A$.
c) Déterminez les dimensions des sous-espaces propres de $b$ en fonction de celles des sous-espaces propres de $A$.
d) Montrez que $B$ est diagonalisable si et s.si $A$ est diagonalisable et inversible.

**14) IMT** Soit $E$ un espace muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$, $v$ un vecteur de $E$ et $f$ l'endomorphisme de $E$ tel que $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = v$.

a) Quel est le rang de $f$ ?
b) Discutez de la diagonalisabilité de $f$ en fonction du vecteur $v$.

**15) CCINP**

a) Montrez que si deux matrices $U$ et $V$ sont semblables, alors pour tout polynôme $R$, $R(U)$ et $R(V)$ sont semblables.

Soit $A, B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

b) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimez $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et $B$.
c) Montrez que si $A$ est diagonalisable et $B$ est nulle, alors $M$ est diagonalisable.
d) Montrez la réciproque.

**16) CCMP**

a) Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$. Montrez que $A$ et $B$ sont semblables.

b) Le résultat subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ ?

**17) CCMP** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $(AB)^n = 0$. Montrez que $(BA)^n = 0$.

**18) CCMP** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, $u, v \in \mathscr{L}(E)$.

a) On suppose que $\operatorname{vect}(u, v)$ contient un élément inversible. Montrez que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.

b) Montrez que la réciproque du **a** est fausse.

c) Montrez que si $u$ et $v$ commutent, alors la réciproque du **a** est vraie.

**19) CCMP** Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 = u^2$ et $C(u) = \{v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \ / \ u \circ v = v \circ u\}$.
Montrez que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminez sa dimension.

**20) CCMP** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto M + \operatorname{tr}(AM)A$.

a) Étudiez la digonalisabilité de $\varphi$.

b) Calculez $\operatorname{tr}(\varphi)$ et $\det(\varphi)$.

**21) CCMP** Pour $c \in \mathbb{R}$, on pose $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$.

a) Déterminez les réels $c$ tels que $A(c)$ ne soit pas diagonalisable.

b) Soit $d$ la plus petite de ces valeurs. Trouvez $P$ inversible telle que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

**22) CCMP**

a) Soit $x = \cos \frac{2\pi}{5}$. Déterminez une équation du second degré à coefficients rationnels dont $x$ est racine, puis donnez les valeurs de $x$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^4 + A^3 + A^2 + A + I_n = 0$. On suppose que la trace de $A$ est un rationnel. Montrez que 4 divise $n$.

**23) CCMP** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrez que $\det(A) > 0$.

**24) CCMP** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur $A$ pour que $B$ soit diagonalisable.

**25) CCMP** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$. On suppose que $B$ est diagonalisable. Montrez que $A$ est diagonalisable et que $I_n - A$ est inversible.

**26) CCMP** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ inversible. Montrez que $A$ est diagonalisable.

**27) CCMP** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = i$ si $i \neq j$.

a) Montrez qu'un réel $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et s.si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+\lambda} = 1$.

b) Montrez que $A$ est diagonalisable. Listez ses valeurs propres avec un encadrement le plus précis possible.

c) Déterminez la somme des valeurs propres de $A$. On note $\mu_n$ la plus grande d'entre elles. Trouvez $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_n \sim Cn^2$ quand $n$ tend vers l'infini.

**28) CEN** À quelles conditions $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Le cas échéant, diagonalisez $A$.

**29) CEN** Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Donnez un vecteur propre évident de $A$.

b) Calculez le polynôme caractéristique de $A$ et donnez son spectre. Justifiez que $A$ est diagonalisable.

c) Exprimez lorsqu'elle existe la matrice inverse $A^{-1}$ en fonction de $I_4, A, A^2$ et $A^3$.

**30) CEN** Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

a) Montrez qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^p = 0$.

b) Montrez que $BA = 0$.

c) Réciproquement, soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $B^n = BA = 0$. Montrez que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

**31) CEN** Soit $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des réels distincts modulo $2\pi$ et $m_1, \ldots, m_p$ des complexes non nuls. Le but de l'exercice est de montrer que la suite $(m_1 e^{i\theta_1 n} + \ldots + m_p e^{i\theta_p n})$ ne converge pas vers 0.

Par l'absurde, on suppose que $m_1 e^{i\theta_1 n} + \ldots + m_p e^{i\theta_p n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

a) On note $M_n = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 n} & \ldots & e^{i\theta_p n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{i\theta_1 (n+p-1)} & \ldots & e^{i\theta_p (n+p-1)} \end{pmatrix}$. Montrez que $Y_n = M_n \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_p \end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Montrez que $|\det M_n|$ est une constante non nulle.

c) À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, exprimez $M^{-1}$ et trouvez une contradiction.

**32) ENS** On considère un automorphisme $\alpha$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le produit matriciel c'est-à-dire tels que $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $\alpha(I_n) = I_n$.

b) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que $\alpha(A)$ l'est aussi.

c) On suppose que $A$ est semblable à une matrice diagonale $D$ à coefficients diagonaux tous distincts. Montrer que $\alpha(A)$ est elle aussi semblable à $D$.

d) Justifier l'existence de $P \in GL_n(C)$ telle que $\alpha(D) = PDP^{-1}$ puis montrer que $\alpha(E) = PEP^{-1}$ pour toute matrice diagonale $E$.

e) Déterminer $\alpha$.