

Problème 1 - Matrices réelles sans valeur propre réelle

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul. Pour alléger les notations, on pose $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. La lettre X est utilisée ici pour désigner une matrice-colonne, on évitera donc de l'utiliser pour désigner l'indéterminée des polynômes qui sera pour une fois notée x .

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Toute matrice Z à coefficients complexes de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $X + iY$ où X, Y sont deux matrices réelles de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On appelle conjuguée de Z la matrice $\bar{Z} = X - iY$.

D'après les propriétés de la conjugaison dans \mathbb{C} , on en déduit que les règles de calcul sont les mêmes : $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$, $\overline{\lambda Z} = \bar{\lambda} \bar{Z}$ et $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on veut montrer l'équivalence suivante :

(α) il existe $(a_1, b_1, \dots, a_m, b_m) \in \mathbb{R}^{2m}$ tel que M soit semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale par blocs

$$\text{diag}(S(a_1, b_1), \dots, S(a_m, b_m)) = \begin{pmatrix} S(a_1, b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S(a_2, b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & S(a_m, b_m) \end{pmatrix}$$

(β) il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de M à racines simples non réelles.

I. Un cas particulier simple

Soit ω un complexe non réel. On pose $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \omega z$.

Vérifiez que f est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , que f a un polynôme annulateur réel à racines simples non réelles et que sa matrice dans une base de \mathbb{C} bien choisie est une matrice $S(a, b)$.

II. (β) \Rightarrow (α)

Q 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$. Montrez qu'il existe un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ annulateur de $S(a, b)$ à racines simples non réelles.

Q 2. Montrez l'implication (β) \Rightarrow (α).

III. (α) \Rightarrow (β)

Dans cette partie, M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui annule un polynôme réel à racines simples non réelles. On appelle f l'endomorphisme de E_n de matrice M dans la base canonique de E_n (autrement dit, pour tout $Z \in E_n$, $f(Z) = MZ$).

Q 3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z} = \lambda z$. Montrez qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = e^{2i\theta}$ et $e^{i\theta} z$ est un réel.

Q 4. Montrez que n est pair. On note $n = 2m$.

Q 5. Montrez que si λ est une valeur propre de M , alors $\bar{\lambda}$ en est une aussi, puis que les sous-espaces propres $\text{sep}(M, \lambda)$ et $\text{sep}(M, \bar{\lambda})$ ont la même dimension.

Q 6. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M , Z un vecteur propre de M (Z est donc une colonne de $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).

a) Montrez que $\text{vect}(Z, \bar{Z})$ est un plan stable par f .

b) On pose $Z = X + iY$ où X, Y sont des matrices réelles. Montrez que (X, Y) est une base de ce plan.

c) Montrez qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq 0$ et l'endomorphisme induit par f dans ce plan a pour matrice $S(a, b)$ dans la base (X, Y) .

Q 7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M . On choisit une base de $\text{sep}(M, \lambda) : (Z_1, \dots, Z_p)$ et on écrit chaque vecteur sous la forme $Z_k = X_k + iY_k$ où X_k, Y_k sont réelles.

Montrez que les plans $(\text{vect}(X_k, Y_k))_{1 \leq k \leq p}$ sont en somme directe et que $\text{sep}(M, \lambda) \oplus \text{sep}(M, \bar{\lambda}) = \bigoplus_{k=1}^p \text{vect}(X_k, Y_k)$.

Q 8. Montrez qu'il existe une base de E_n constituée de vecteurs réels dans laquelle la matrice de f est égale à une matrice diagonale par blocs $D = \text{diag}(S(a_1, b_1), \dots, S(a_m, b_m))$.

Montrez enfin qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$.

IV. Un exemple

On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q 9. On écrit $xI_4 - M$ par blocs (2,2) : $xI_4 - M = \begin{pmatrix} A & -4I_2 \\ 2I_2 & B \end{pmatrix}$

a) Calculez le produit par blocs $\begin{pmatrix} -4I_2 & A \\ B & 2I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2I_2 & 0 \\ B & I_2 \end{pmatrix}$. Déduisez-en que $\det(xI_4 - M) = \det(AB + 8I_2)$.

b) Explicitez le polynôme caractéristique de M . Déterminez ses racines imaginaires pures, puis les autres racines.

Q 10. Montrez que M annule un polynôme réel à racines simples non réelles.

Vérifiez que les vecteurs-colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2-2i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M , puis donnez une matrice

$P \in GL_4(\mathbb{R})$ et une matrice réelle diagonale par blocs D telle que $M = PDP^{-1}$.

V. Application

Dans cette partie, on suppose que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ annule un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ à racines simples dans \mathbb{C} . On garde les notations introduites précédemment.

On note $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres réelles et $\text{Sp}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes non réelles de M .

Q 11. On pose $G = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)} \text{sep}(M, \lambda)$ et $H = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}-\mathbb{R}}(M)} \text{sep}(M, \lambda)$. Par convention, si M n'a pas de valeur propre réelle, alors $G = \{0\}$ et si M n'a que des valeurs propres réelles, alors $H = \{0\}$.

Montrez que G et H sont supplémentaires dans E_n et qu'ils sont stables par f .

On note g et h les endomorphismes induits par f dans G et H respectivement.

Q 12. Montrez qu'il existe une base \mathcal{B} de E_n telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}} f = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ où D est une matrice diagonale réelle et S une matrice diagonale par blocs $\text{diag}(S(a_1, b_1), \dots, S(a_m, b_m))$. On remarque que R est une matrice réelle.

Q 13. Un exercice classique : soit $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

a) Justifiez que la fonction $x \mapsto \det(U + xV)$ est une fonction polynôme.

b) Montrez que s'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\det(U + zV) \neq 0$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\det(U + xV) \neq 0$.

Application Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: montrez qu'elles sont alors semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 14. Montrez finalement que M est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice R .