CONVERGENCE DOMINÉE, INTÉGRALES À PARAMÈTRES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1) Théorème de convergence dominée**

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1}\frac{1+n\,x}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x}$

****2)** Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^{n+2}}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{2n}\right)^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$

****3)** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle I_n=\int_0^1\sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

a) Établir l'inégalité suivante : $\forall u\in\mathbb{R},\quad |\sin u|\leqslant|u|$.

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\geqslant0}$ puis retrouver ce résultat par une autre méthode.

c) À l'aide du changement de variable $t=u^{\frac{1}{n}}$, montrer que

$$I_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{J}{n},$$

où J est une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

****4)**

a) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(0)$.

b) Chercher un équivalent de $\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

c) Chercher un équivalent de $\displaystyle-1+\int_0^1\sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

****5)** Soit $x\in[0,n]$. Montrer que $(1-x/n)^n\leqslant e^{-x}$.

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n(1-x/n)^n x^p\,\mathrm{d}x$ pour $p\in\mathbb{N}$.

****6)** En utilisant notamment un changement de variable et le théorème de convergence dominée, démontrer que

$$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{K}{n}\qquad\text{où } K=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

***7) Théorème d'intégration terme à terme**

En développant en série $\dfrac{1}{1-t}$, démontrer que

$$\int_0^1\frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

****8)** Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

****9)** Montrer que la série $\displaystyle\sum(-1)^n\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ converge et donner la valeur de sa somme.

****10)** Soit (a_n) une suite telle que la serie $\sum a_n$ converge absolument.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}\frac{a_n}{n!}x^n$ est convergente.

b) On pose $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\mathrm{e}^{-x}$. On admettra momentanément que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrez que f est intégrable sur $[0,+\infty[$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

****11)** Montrer que la fonction $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On admettra momentanément que S est continue sur $\mathbb{R}$.

Prouver l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

****12)** On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir un exercice ci-dessous).

Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{t^2}-x}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

****13)** Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$ (on admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

****14)** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On pose, pour tout réel $a \geqslant 0$: $F(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1+a\,t}}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
b) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} F(a) = 0$.

****15)** Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On suppose dans un premier temps que f est intégrable sur $[0,+\infty[$. On pose, pour tout réel $x \geqslant 0$: $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
b) Montrer que $\displaystyle\lim_{+\infty} F = 0$.

Dans un deuxième temps, on suppose seulement f bornée sur $[0,+\infty[$. À un détail près que vous préciserez, montrez la même chose.

****16) Intégrale de Gauss**

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } h(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que g et h sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
b) Montrer que $g + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, constante que l'on déterminera.
c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
d) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

****17) Fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite**

On cherche à calculer explicitement la fonction ϕ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

(Il s'agit de la **fonction caractéristique** pour la loi normale centrée réduite. Pour les variables aléatoires continues, la fonction caractéristique joue un rôle analogue à la fonction génératrice pour les variables discrètes.)

a) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
b) Montrer que ϕ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on précisera.
c) À l'aide de l'intégrale de Gauss, calculer $\phi(0)$.
d) Montrer enfin que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

****18)** On considère la fonction : $F\colon\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\,t)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de F.
b) Montrer que F est de classe C^1 sur son domaine de définition.
c) Calculer F' et en déduire F.

****19)** Soit $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés. On pose :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} - \mathrm{e}^{-at}}{t} \cos(b\,t)\ \mathrm{d}t.$$

a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
c) Calculer g', puis g.

****20)** Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$.

a) ▷ Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de g.
▷ Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathscr{D}$ et calculer sa dérivée.
▷ En déduire l'expression de g.

b) On pose, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $\quad I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\beta}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$.
▷ Pour quelles valeurs de (α, β) cette intégrale est-elle convergente ?
▷ Lorsqu'elle converge, pratiquer le changement de variable $u \mapsto u^\gamma$ dans cette intégrale. En déduire la valeur de $I(\alpha, \beta)$.

****21)** Démontrer que la fonction F définie par :

$$\forall p \geqslant 0, \quad F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-pt}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
On s'intéresse maintenant au comportement de la fonction F au voisinage de 0.

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F'(p)$ se met sous la forme

$$F'(p) = \int_0^{+\infty} G(p, u)\,\mathrm{e}^{-u}\ \mathrm{d}u,$$

où $G(p, u)$ est une fonction rationnelle des variables p et u que l'on précisera.
b) Conjecturer la limite quand $p \to 0^+$ de $F'(p)$ puis la démontrer.
c) La fonction F est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique du résultat.

****22) Prolongement C^∞**
Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$.

a) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\ \mathrm{d}t$.
b) En déduire que $g\colon x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

****23)** On donne la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

Calculer, pour tout réel x positif :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\,(1+t^2)}\ \mathrm{d}t.$$

****24)** Soit $f \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$. $\quad$ Démontrer que :

$$\lim_{h \to 0_+} \int_0^1 \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} f(0).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x = h\,t$.

****25) Compléments sur la fonction Gamma d'Euler**
On rappelle la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

Démontrer la relation suivante :

$$\forall x > 1, \quad \Gamma(x)\,\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\ \mathrm{d}t,$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann vérifiant $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ pour tout réel $x > 1$.

****26) Transformée de Fourier**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la *transformée de Fourier* de f, notée $\widehat{f}$, par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose de plus que f est de classe C^1 et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$.

▷ Montrer que $\lim\limits_{\pm\infty} f = 0$.

▷ Montrer que : $\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\omega) = \mathrm{i}\omega\,\widehat{f}(\omega)$.

*****27)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+a) - f(t)|\,\mathrm{d}t$.

a) Justifiez la bonne définition de F.

b) Montrez que $\lim\limits_{a\to 0} F(a) = 0$.

c) Quelle est la limite de F en $+\infty$? On pourra commencer par étudier le cas où f est à support compact (*i.e.* nulle en dehors d'un segment).

Oraux de concours

1) CCINP

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto (\operatorname{ch} x)^{-n}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b) Limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ quand $n \to +\infty$.

c) Nature des séries $\sum (-1)^n I_n$ et $\sum I_n$ (indication : montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{ch} x \geqslant \operatorname{sh} x$).

d) Rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.

2) Navale

On pose, pour $n \geqslant 2$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que (I_n) est bien définie et calculer sa limite.

3) CCINP Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

a) Donner une relation entre I_n et J_n (on pourra calculer $n(1-I_n)$).

b) En déduire un développement asymptotique de I_n avec une précision de $\dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que l'application $F : u \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^u \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie, puis montrer que $\displaystyle\int_0^1 F(t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

d) En déduire un développement asymptotique de J_n avec une précision $\dfrac{1}{n}$, puis un développement de I_n en $\dfrac{1}{n^2}$.

4) ENSEA Soit $\Phi : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Montrer que Φ admet une unique racine z dans $[0,\pi]$ et que $z > \dfrac{\pi}{2}$.

5) IMT Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrez que pour tout $x > 0$, l'intégrale $F(x)$ est convergente.

b) Étudier les variations de F.

c) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

d) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) \geqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$. En déduire la limite de F en 0.

6) ENSEA

a) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} t}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer f'.

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire f.

7) CCINP Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

a) Donner le domaine de définition de f.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) Pour $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.

d) Déterminer une expression de $f(x)$ sous forme de série.

e) Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser pour trouver cette expression de $f(x)$?

8) CCINP Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $f(x)$ existe pour $x \geqslant 0$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

d) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

e) Calculer $f'(x)$ et $f(x)$.

f) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

9) CCINP On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \ln f(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

10) CCMP Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\ln t\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $g(0)$.

b) Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(0)$.

11) CCMP Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^x)}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Calculer $f(x)$.

12) CCMP Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle.

c) En déduire f.

13) CCMP Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t^x)\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Écrire f comme somme d'une série de fonctions.

c) Déterminer la limite de f en 0.

14) CCMP Soit $f : x \mapsto \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

b) Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$.

c) Trouver un équivalent simple de f en 0.

15) CCMP Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln\Gamma(u)\,\mathrm{d}u$.

c) En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln\Gamma(x)$.

16) CCMP Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{t^x \ln t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

c) Donner une expression de $f(x)$ comme somme de série pour $x > 0$.

17) CCMP Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, croissante et de limite $+\infty$. Montrer l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{a_n}$$

18) CCMP Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-t^x)}{t}\,\mathrm{d}t$.
Justifier la définition de f et donner une expression de $f(x)$ comme somme d'une série.

19) CCMP Soit $T : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que T est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $T(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.