Problème 1 - Une équation fonctionnelle

On cherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\Big(f(x) + y\Big) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

Question 1) On pose $a = f(0)$. Montrez qu'on a à la fois $f(a) = a$ et $a = f(a) - 4a^2$. Déduisez-en la valeur de a.

Question 2) Montrez que f est une fonction paire.

Question 3) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\Big(f(x) + x^2\Big) = 4x^2 f(x)$ et $f\Big(x^2 + f(x)\Big) = 4f(x)^2$. Déduisez-en

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = x^2$$

Question 4) En général, la proposition précédente est-elle équivalente à $\quad (\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0)$ ou $\big(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = x^2\big)$? À défaut, l'une des deux implique-t-elle l'autre ?

Question 5) Donnez deux solutions au problème.

Question 6) On suppose que f s'annule en un réel $c \neq 0$.

a) Donnez une relation entre $f(t)$ et $f(c^2 - t)$ valable pour tout réel t.

b) Soit $t \in \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{c^2}{2}\right\}$. Montrez que $f(t) = 0$ en vous servant du résultat de la question 3.

c) Concluez cette question : justifiez que f est la fonction nulle.

Question 7) Concluez ce problème en donnant toutes les solutions.

Problème 2 - Calculs de sommes trigonométriques

Soit $\theta = \dfrac{2\pi}{7}$, $a = \cos\theta$, $b = \cos(2\theta)$, $c = \cos(3\theta)$. On pose $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + ac + bc$, $\sigma_3 = abc$.

On ne connaît pas de valeur exacte simple de a, b et c. Néanmoins, on est quand même capable de donner des relations satisfaites par ces 3 nombres, ce que vous allez faire dans ce devoir.

Question 1) Montrez que $\cos(4\theta) = \cos(3\theta)$, $\cos(5\theta) = \cos(2\theta)$, $\cos(6\theta) = \cos(\theta)$.

Question 2)

a) Montrez $1 + \sigma_1 = 2\cos(3\theta)(\cos(\theta) + \cos(3\theta))$.

b) Déduisez-en que $1 + \sigma_1 = 4\cos(4\theta)\cos(2\theta)\cos(\theta)$.

Question 3) Montrez que $(1 + \sigma_1) \times \sin(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin(8\theta)$. Déduisez-en la valeur de σ_1.

Question 4)

a) Montrez que $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{1}{2}(3 + \sigma_1)$, puis donnez la valeur de $a^2 + b^2 + c^2$.

b) Déduisez-en la valeur de σ_2.

Question 5) Calculez σ_3.

Question 6) Développez le produit $(x-a)(x-b)(x-c)$ et montrez que a, b, c sont les racines d'un polynôme à coefficients entiers.

Question 7) Soit $t = \tan^2\theta + \tan^2(2\theta) + \tan^2(3\theta)$.

a) Montrez que $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = \dfrac{3}{8}$.

b) Calculez la valeur de t.

Question 8) Calculez $a^3 + b^3 + c^3$.

Problème 1

Question 1) On spécialise $x \leftarrow 0$ et $y \leftarrow 0$: $f(a) = a$.

On spécialise $x \leftarrow 0$ et $y \leftarrow -f(0)$: $f(0) = a = f(0^2 - (-a)) + 4 \times (-a) \times a = f(a) - 4a^2$.

Donc $4a^2 = 0$, autrement dit $a = 0$.

Question 2) On spécialise $x \leftarrow 0$: on a montré que $f(0) = 0$ donc pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = f(-y) + 4yf(0) = f(-y)$. Donc f est paire.

Question 3) On spécialise $y \leftarrow x^2$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\Big(f(x) + x^2\Big) = f(0) + 4x^2 f(x) = 4x^2 f(x)$.

On spécialise $y \leftarrow -f(x)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = f\Big(x^2 + f(x)\Big) + 4 \times (-f(x)) \times f(x) = f\Big(x^2 + f(x)\Big) - 4f(x)^2$. Or $f(0) = 0$ donc il vient $f\Big(x^2 + f(x)\Big) = 4f(x)^2$.

Au total, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $4x^2 f(x) = 4f(x)^2$ donc $f(x) \times (x^2 - f(x)) = 0$ donc $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$.

Question 4) La réponse est non, car la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $g(x) = x^2$ si $x \geqslant 0$ vérifie bien la proposition $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0 \text{ ou } g(x) = x^2$, mais pas $\quad (\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = 0) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = x^2\big)$.

Cependant, si on a $\quad (\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = x^2\big)$, alors on peut évidemment en déduire $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = x^2$.

Question 5) Simple vérification : la fonction nulle $x \mapsto 0$ et la fonction carrée $x \mapsto x^2$ sont solutions.

Question 6)

a) On spécialise $x \leftarrow c$ et $y \leftarrow t$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(c^2 - t) + 4tf(c) = f(c^2 - t)$.

b) Soit $t \in \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{c^2}{2}\right\}$. Alors d'après la question 3, on a $f(t) = 0$ ou $f(t) = t^2$.
Si $f(t) = t^2$, alors d'après a, $f(c^2 - t) = t^2$. Or on doit aussi avoir $f(c^2 - t) = 0$ ou $f(c^2 - t) = (c^2 - t)^2$.
Donc on a $t^2 = 0$ ou $t^2 = (c^2 - t)^2$, ce qui est dans les deux cas impossible car $t \neq 0$ et $t \neq \dfrac{c^2}{2}$.
Contradiction.
On en déduit donc que $f(t) \neq t^2$ et donc d'après la question 3, $f(t) = 0$.

c) La question précédente montre : $\forall t \in \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{c^2}{2}\right\} \quad f(t) = 0$.
Pour $t = 0$, on a depuis la question 1 $f(0) = 0$.
Et pour $t = \dfrac{c^2}{2}$, par parité de f, on a $f\left(\dfrac{c^2}{2}\right) = f\left(-\dfrac{c^2}{2}\right) = 0$ d'après b.
Dans tous les cas, on a donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = 0$.

Question 7) La question 5 montre que les fonctions nulle et carrée sont solutions.

La question 6 montre que si f est solution et qu'elle s'annule ailleurs qu'en 0, alors elle est constamment nulle. Et la question 3 permet alors de montrer que si f est solution et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, alors f est la fonction carrée.

Conclusion : les deux solutions sont les fonctions nulle et carrée.

Problème 2

Question 1) On note que $7\theta = 2\pi$ donc $4\theta = 2\pi - 3\theta$ donc $\cos 4\theta = \cos(2\pi - 3\theta) = \cos(-3\theta) = \cos 3\theta$.

De même, $\cos 5\theta = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$, $\cos 6\theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$.

Question 2)

a) On pose $S = 1 + \sigma_1$ et on remarque d'abord que $S = 1 + a + b + c = 1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta$.
Puis on utilise une formule de trigonométrie pour transformer les sommes de deux cosinus en produits : $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.
On a donc $\cos 4\theta + \cos 2\theta = 2\cos\dfrac{4\theta + 2\theta}{2}\cos\dfrac{4\theta - 2\theta}{2} = 2\cos 3\theta\cos\theta$
Et on a aussi : $1 + \cos 6\theta = 2\cos(3\theta)^2$.
Donc $S = 2\cos(3\theta)^2 + 2\cos 3\theta\cos\theta = 2\cos 3\theta(\cos\theta + \cos 3\theta)$.

b) On recommence : $\cos 3\theta + \cos\theta = 2\cos\dfrac{3\theta+\theta}{2}\cos\dfrac{3\theta-\theta}{2} = 2\cos 2\theta\cos\theta$,
donc $S = 2\cos 3\theta \times 2\cos 2\theta\cos\theta = 4\cos 4\theta\cos 2\theta\cos\theta$.

Question 3) $S\times\sin(\theta) = 4\cos 4\theta\cos 2\theta\cos\theta\sin\theta = 2\cos 4\theta\cos 2\theta\times(2\cos\theta\sin\theta) = 2\cos 4\theta\cos 2\theta\times(\sin 2\theta)$

$= \cos 4\theta\times(2\cos 2\theta\sin 2\theta) = \cos 4\theta\times\sin 4\theta = \dfrac{1}{2}\sin 8\theta$.

On n'a fait qu'appliquer la formule $\sin 2x = 2\sin x\cos x$...

Or on remarque que $\theta \equiv 8\theta\ [2\pi]$ donc $\sin\theta = \sin 8\theta$ et comme $\sin\theta \neq 0$, alors on peut diviser, on obtient $S = \dfrac{1}{2}$, donc $\sigma_1 = \dfrac{-1}{2}$.

Question 4)

a) $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ et de même, $\cos^2 2\theta = \dfrac{1+\cos 4\theta}{2}$, $\cos^2 3\theta = \dfrac{1+\cos 6\theta}{2}$
donc $a^2 = \dfrac{1+b}{2}$, $b^2 = \dfrac{1+c}{2}$ et $c^2 = \dfrac{1+a}{2}$, donc $a^2+b^2+c^2 = \dfrac{3+a+b+c}{2} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{\sigma_1}{2} = \dfrac{5}{4}$.

b) $\sigma_1^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc = a^2+b^2+c^2+2\sigma_2$ donc $2\sigma_2 = \sigma_1^2-(a^2+b^2+c^2) = \dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4} = -1$ donc $\sigma_2 = \dfrac{-1}{2}$.

Question 5) $\sigma_3 = abc = \dfrac{1+\sigma_1}{4} = \dfrac{1}{8}$.

Question 6) a, b, c sont racines de l'équation $P(x) = 0$ où $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3-\sigma_1x^2+\sigma_2x-\sigma_3 = x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}$, donc a, b, c sont racines de l'équation $8P(x) = 8x^3+4x^2-4x-1 = 0$.

Question 7)

a) $\sigma_2^2 = (ab+ac+bc)^2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2 = a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$
donc $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = \sigma_2^2-2\sigma_1\sigma 3 = \dfrac{3}{8}$.

b) On note que $t = \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}-3$ en utilisant la formule $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
Donc $t = \dfrac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{\sigma_3^2}-3 = 21$.

Question 8) On a montré en Td que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ donc $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x+3\cos x}{4}$

Donc $a^3 = \dfrac{\cos 3\theta+3\cos\theta}{4} = \dfrac{c+3a}{4}$, et de même $b^3 = \dfrac{a+3b}{4}$ et $c^3 = \dfrac{b+3c}{4}$

donc $a^3+b^3+c^3 = \dfrac{4a+4b+4c}{4} = \sigma_1 = \dfrac{-1}{2}$.