## Problème 1 - CCINP 2013 - PC

On s'intéresse ici à des suites et séries de fonctions en liaison avec des intégrales.

Les parties I et II sont indépendantes. On admet les résultats suivants :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\ln u}{u-1}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{6}$$

# I. Étude de quelques suites d'intégrales

**Q 1.**

a) On considère ici une application continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

b) On suppose ici de plus que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est intégrable sur $]0,1]$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
*On pourra transformer $nI_n$ grâce à un changement de variable.*

c) Application 1.
Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \sin(t^n)dt$ (grâce à une intégrale).

**Q 2.** On considère mainstenant que $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une application continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Grâce à un changement de variable approprié, justifier l'existence de $A_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t^n)dt$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nA_n$ (grâce à une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer).

**Q 3.**

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et tout $A > 1$, on pose $C_n(A) = \displaystyle\int_1^A \sin(t^n)dt$.
Grâce à un changement de variable et une intégration par parties, exprimer $C_n(A)$ en fonction de $\displaystyle\int_1^{A^n} \frac{1-\cos(u)}{u^2} u^{\frac{1}{n}} du$ et de $A$.

b) En déduire que $C_n(A)$ a une limite quand $A \to +\infty$, prouvant l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)dt$ pout tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

c) Application 2.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n)dt$ grâce à $K$, admise en préambule.

# II. Étude de séries de fonctions

**Q 4.** Un premier exemple.

a) Pour tout $x \in ]-1,1[$, calculer $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ainsi que $F'(x)$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to1^-} F(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to1^-} (1-x)F(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to1^-} (1-x)F'(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^-} (1-x)^2F'(x)$.

**Q 5.** Un deuxième exemple.

Dans cette question, pour tout $x \in ]-1,1[$, on pose cette fois $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

a) Soit $a \in ]0,1[$. Prouver la convergence normale de cette série de fonctions sur le segment $[-a,a]$.
En déduire que $F$ est définie et continue sur $]-1,1[$.

b) Montrer que, pour tout $x \in ]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1-x^n}{1-x} \leqslant n$.
En déduire $\displaystyle\lim_{x\to1^-} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^-} (1-x)F(x)$.

**Q 6.** Dans cette question, $f$ est une application réelle continue et croissante sur $[0,1[$ avec $f(0)=0$ et telle que $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u}$ soit intégrable sur $]0,1[$.
Soit $x \in ]0,1[$.

a) Justifier l'existence de $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x^t)dt$ et l'égalité $G(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{f(u)}{u}du$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'encadrement :

$$\int_n^{n+1} f(x^t)dt \leqslant f(x^n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x^t)dt.$$

c) En déduire l'existence de $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x^n)$, ainsi qu'un encadrement de $F(x)$ par deux intégrales dépendant de $x$.

d) Conclure avec soin que : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{f(u)}{u}du$.

**Q 7.** Un dernier exemple.

Pour tout $x \in ]-1,1[$, on pose enfin cette fois : $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1-x^n)$.

a) Montrer que $F$ est définie et de classe $C^1$ sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une série de fonctions.

b) Grâce à 6.(d), montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}du$ (intégrale donnée en préambule).

c) Par une méthode similaire à celle de la question 6., montrer que :

$$\lim_{x\to 1^-} \left( (1-x)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} \right) = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}du.$$

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} ((1-x)^2 F'(x))$.