Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt}\, \mathrm{d}t$.

Q 1. Justifiez que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $\lambda = F(0)$ est un réel strictement positif.

Q 2. Montrez que F est continue sur $\mathbb{R}$ (une réponse autonome est attendue, comme si la suite de l'exercice n'existait pas).

Q 3. Montrez que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Montrez que F est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Q 5. Résolvez cette équation et déduisez-en le signe des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt)\, \mathrm{d}t$.

Exercice hebdomadaire 6 - Corrigé

Q 1. On pose $f:(x,t)\mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{ixt}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$f(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc $t\mapsto f(x,t)$ l'est aussi.

Pour $t\geqslant 1$, $|f(x,t)|\leqslant e^{-t}$ et $t\mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t\mapsto f(x,t)$ l'est aussi.

Conclusion : $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc $F(x)$ est bien défini. De plus $\lambda=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive donc $\lambda>0$ d'après le th. de stricte positivité de l'intégrale.

Q 2. La question précédente montre que $\varphi:t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

De plus, pour tout $t>0$ et $x\in\mathbb{R}$, $|f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$ et $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc d'après le th. de continuité sous le signe $\displaystyle\int$, F est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 3. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$ (d'après les th. généraux sur les fonctions de classe C^1).

De plus, pour tout $t>0$ et $x\in\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=|i\sqrt{t}\,e^{(-1+ix)t}|=\sqrt{t}\,e^{-t}$ et $t\mapsto\sqrt{t}\,e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (car continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $e^{-t/2}$ quand $t\to+\infty$).

Donc d'après le th. de dérivabilité sous le signe $\displaystyle\int$, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}i\sqrt{t}\,e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t$.

Q 4. Sous réserve de convergence, une intégration par parties donne pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$F'(x)=i\left(\left[\sqrt{t}\dfrac{e^{(-1+ix)t}}{(-1+ix)}\right]_{t=0}^{+\infty}-\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{e^{(-1+ix)t}}{(-1+ix)}\,\mathrm{d}t\right)$; or le crochet converge et vaut 0 et l'intégrale de droite est égale à un facteur près à $F(x)$, donc l'intégration par parties est licite.

On a donc montré : $F'(x)=\dfrac{i}{2(1-ix)}F(x)$.

Q 5. $\dfrac{i}{2(1-ix)}=\dfrac{i(1+ix)}{2(1+x^2)}=\dfrac{-x}{2(1+x^2)}+i\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

donc une primitive de $x\mapsto\dfrac{i}{2(1-ix)}$ est $x\mapsto-\dfrac{1}{4}\ln(1+x^2)+\dfrac{i}{2}\arctan x$.

Les solutions de l'équation différentielle précédente sont les fonctions $x\mapsto\mu e^{-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{i}{2}\arctan x}$ où μ est une constante complexe, *i.e.* les fonctions $x\mapsto\mu\dfrac{e^{\frac{i}{2}\arctan x}}{\sqrt[4]{1+x^2}}$.

Comme F est solution, elle est de cette forme et en évaluant en 0, la constante d'intégration est λ : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F(x)=\lambda\frac{e^{\frac{i}{2}\arctan x}}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

En calculant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\,\mathrm{d}t=\lambda\frac{\cos(\frac{1}{2}\arctan x)}{\sqrt[4]{1+x^2}}\quad\text{et}\quad\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\,\mathrm{d}t=\lambda\frac{\sin(\frac{1}{2}\arctan x)}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

Comme $\arctan x\in\,]-\pi/2,\pi/2[$, $\cos(\frac{1}{2}\arctan x)>0$ et $\sin(\frac{1}{2}\arctan x)$ est du signe de x, donc comme $\lambda>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\,\mathrm{d}t>0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est du signe de x.