Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t$ quand cette intégrale a un sens.

Q 1. Déterminez l'ensemble de définition I de la fonction f.

Q 2.

a) Montrez que pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) = 2x(f(x) - f(x+1))$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduisez-en une expression de $f(n)$ à l'aide de factorielles et de puissances de 2.

Q 3. Montrez que f est monotone sur I, puis à l'aide de ce qui précède, montrez que f a pour limite 0 en $+\infty$.

Q 4. Soit $a > \dfrac{1}{2}$ et x, y deux réels dans l'intervalle $[a, +\infty[$.

a) Montrez que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $(u, v) \in [\alpha, +\infty[$, $|e^{-u} - e^{-v}| \leqslant |u - v|e^{-\alpha}$.

b) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^a}\,\mathrm{d}t$ converge.

c) Déduisez-en que f est continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, puis sur I tout entier.

Q 5. Donnez un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$, puis la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice hebdomadaire 5 - Corrigé

Q 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$ est continue sur $[0, +\infty[$: une étude en $+\infty$ suffit.

Quand $t \to +\infty$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^x} \sim \dfrac{1}{t^{2x}}$ et ces fonctions sont positives, donc les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2x}}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $2x > 1$, donc $I =]1/2, +\infty[$.

Q 2.

a) Soit $X > 1$. On effectue une intégration par parties sur l'intégrale $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t = \left[t \times \frac{1}{(1+t^2)^x}\right]_{t=0}^X + 2x\int_0^X \frac{t^2}{(1+t^2)^{x+1}}\,\mathrm{d}t = X \times \frac{1}{(1+X^2)^x} + 2x\int_0^X \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{x+1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= X \times \frac{1}{(1+X^2)^x} + 2x\left(\int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t - \int_0^X \frac{1}{(1+t^2)^{x+1}}\,\mathrm{d}t\right).$$

Or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X \times \frac{1}{(1+X^2)^x} = 0$ car $X \times \dfrac{1}{(1+X^2)^x} \underset{X\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{X^{2x-1}}$, donc par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$f(x) = 2x(f(x) - f(x+1))$$

b) Par récurrence, on montre que $f(n) = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!^2} \times \dfrac{\pi}{2}$, car $f(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

Q 3. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \leqslant y$. Alors pour tout $t \geqslant 0$, $\ln(1+t^2) \geqslant 0$, donc $x\ln(1+t^2) \leqslant y\ln(1+t^2)$ donc $(1+t^2)^x = e^{x\ln(1+t^2)} \leqslant (1+t^2)^y$, donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^y} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^2)^x}$. Donc par croissance de l'intégrale, $f(y) \leqslant f(x)$.

La fonction f est donc décroissante sur I. Comme elle est clairement positive, elle admet une limite réelle ℓ en $+\infty$ (th. de la limite monotone). En particulier, $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

D'après la question **Q 2b** et la formule de Stirling, $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi(2n-2)}\left(\frac{2n-2}{e}\right)^{2n-2}}{2\pi(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{2n-2}} \times \dfrac{\pi}{2^{2n-2}\times 2} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$, ce qui permet de conclure que $\ell = 0$.

Q 4.

a) La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc d'après l'inégalité des acc. finis, $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leqslant |u-v| \displaystyle\sup_{t\in[u,v]} |\varphi'(t)|$.

Or quand u et v sont dans $[\alpha, +\infty[$, le segment $[u, v]$ y est inclus donc pour tout $t \in [u, v]$, $|\varphi'(t)| = e^{-t} \leqslant e^{-\alpha}$. D'où le résultat attendu.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^a}$ est continue sur $[0, +\infty[$: une étude en $+\infty$ suffit.

Quand $t \to +\infty$, $\dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^a} \sim \dfrac{2\ln(t)}{t^{2a}}$ et ces fonctions sont positives, donc les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^a}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{2a}}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme $2a > 1$, on peut choisir $\beta \in]1, 2a[$ et alors $\dfrac{\ln(t)}{t^{2a}} = o\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge (car $\beta > 1$), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^a}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

c) D'après la question **a**, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\left|e^{-x\ln(1+t^2)} - e^{-y\ln(1+t^2)}\right| \leqslant |x-y|\ln(1+t^2)e^{-a\ln(1+t^2)}$, *i.e.*

$\left|\dfrac{1}{(1+t^2)^x} - \dfrac{1}{(1+t^2)^y}\right| \leqslant |x-y|\dfrac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^a}$. Par croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire, on a donc

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{(1+t^2)^x} - \frac{1}{(1+t^2)^y}\right|\mathrm{d}t \leqslant |x-y|\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{(1+t^2)^a}\,\mathrm{d}t.$$

Ceci prouve que f est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$, donc continue. Et comme ceci est vrai pour tout $a > 1/2$, f est continue sur I.

Q 5. Pour $x > 1$, on pose $n = \lfloor x \rfloor$, de sorte que $n \leqslant x < n+1$. Comme f est décroissante sur I, $f(n) \leqslant f(x) \leqslant f(n+1)$. Or quand $x \to +\infty$, $n \to +\infty$ et $f(n) \sim f(n+1) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Donc par encadrement, $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/2}}$.

Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.