Mpi - Programme de colles 8

Semaine du 18 au 23 novembre 2024

1 Intégrales généralisées

a) Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

b) Pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, convergence ou divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$. Principales propriétés : indépendance par rapport au choix de a, linéarité sous des hypothèses de convergence, positivité, croissance.

Cas des fonctions positives : croissance de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$, CNS sur cette fonction pour que l'intégrale converge ; th. de comparaison pour les fonctions positives ; comparaison série-intégrale ; lien entre la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ pour u suite croissante, divergeant vers $+\infty$.

c) Convergence d'autres types d'intégrales, extension des résultats.

d) Exemples de référence : nature des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, dt$.

e) Changement de variable dans une intégrale généralisée. Intégration par parties.

f) Convergence absolue d'une intégrale. La convergence absolue entraîne la convergence. Fonctions intégrables sur un intervalle.

g) Intégration des relations de comparaisons.

2 Intégrales à paramètre

a) Th. de convergence dominée.

b) Th. d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

c) Th. de continuité sous le signe intégral.

d) Th. de dérivation sous le signe intégral : cas des fonctions C^1, extension aux fonctions C^k ou C^∞.

e) Domination locale.