Problème 1 - Calcul d'une série et d'une intégrale

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les résultats des parties 1 et 2. La partie 4 est indépendante des précédentes.

I. Intégrales et séries

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

On note, sous réserve d'existence,

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t, \quad G(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Q 1. Justifiez l'existence des intégrales $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$.

Q 2.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculez $u_n(\alpha) = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t$. Puis montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge.

b) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Q 3.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrez que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0$. Déduisez-en l'égalité

$$F(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$$

Q 4.

a) En effectuant le changement de variable $u = t^{1-\alpha}$ et en le justifiant soigneusement, montrez l'égalité

$$G(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)$$

b) Montrez l'égalité

$$G(\alpha) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha - 1}$$

Q 5. Pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? Justifiez ensuite l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha^2 k^2 - 1}$$

II. Trigonométrie et intégrales

Q 6. Soit $z \in \mathbb{C} - \{0, 1, -1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Justifiez l'égalité

$$\sum_{k=-n}^{+n} z^{2k} = \frac{z^{2n+1} - \dfrac{1}{z^{2n+1}}}{z - \dfrac{1}{z}}$$

Q 7. Soit $x \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifiez que $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=-n}^{+n} e^{ikx}$.

b) Montrez que $\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Q 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrez que $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et donnez sa valeur.

III. Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, a désigne un réel compris strictement entre 0 et 1.

On pose $\varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante : $\quad \varphi(0) = 0 \quad$ et $\quad$ si $x \in]0, \pi]$, $\varphi(x) = \dfrac{\cos(ax) - 1}{2\sin\frac{x}{2}}$

Q 9. Montrez que φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

Q 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x) \sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) \mathrm{d}x$. Grâce à une intégration par parties que vous justifierez soigneusement, montrez que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

Q 11.

a) Montrez que $v_n = \dfrac{(-1)^n\ a\sin(\pi a)}{a^2 - n^2}$.

b) Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + I_n + J_n$.

Q 12. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et donnez la valeur de sa somme en fonction de a.

Q 13. Montrez que pour tout $\alpha > 1$, l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$$

IV. Espaces vectoriels normés

Dans cette partie, α est un réel dans $]1, +\infty[$ et E désigne l'ensemble des fonctions bornées et continues par morceaux sur $[0, +\infty[$. Il est admis que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note encore φ une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^{\alpha}}$.

Q 14. Pour $f \in E$, montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge.

On pose pour tout $f \in E$, $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ et $\|f\|_{\infty} = \sup_{[0,+\infty[} |f|$.

Q 15. Justifiez que $\|\ \|_{\infty}$ est une norme sur E.

Q 16. Montrez que Φ est une forme linéaire continue sur E et donnez sa norme subordonnée $\displaystyle\sup_{f\in E-\{0\}} \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|_{\infty}}$.

Soit E' l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $[0, +\infty[$. Pour $f \in E'$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f|$.

Q 17. Justifiez que $\|\ \|_1$ est une norme sur E'.

Q 18. Montrez que Φ est encore une forme linéaire continue sur E'.

Q 19. Pour $\beta > 0$, on note h_{β} la fonction définie par

$$h_{\beta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \beta] \\ \frac{\beta+\beta^2-x}{\beta^2} & \text{si } x \in]\beta, \beta+\beta^2[\\ 0 & \text{si } x \in [\beta+\beta^2, +\infty[\end{cases}$$

Représentez la courbe de h_{β}, calculez $\|h_{\beta}\|_1$, montrez que la norme subordonnée $\displaystyle\sup_{f\in E'-\{0\}} \frac{|\Phi(f)|}{\|f\|_1}$ est égale à 1.

Devoir surveillé 3 - sujet CCINP-E3A - Corrigé

Problème 1

I.

Q 1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc en particulier sur $[0,1]$: l'intégrale $F(\alpha)$ est donc une intégrale normale d'une fonction continue sur un segment.

Pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$, or $\alpha > 1$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $G(\alpha)$ converge.

Q 2.

a) $u_n(\alpha) = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha n}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \left[\frac{1}{\alpha n+1} t^{\alpha n+1}\right]_0^1 = \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.

La suite de terme général $\dfrac{1}{\alpha n+1}$ est positive, décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}\right| \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2 n^2 - 1}$ et $\dfrac{1}{\alpha^2 n^2 - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha^2 n^2}$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\alpha^2 n^2}$ converge (puisque l'exposant de n est strictement supérieur à 1) donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2 n^2 - 1}$ est absolument convergente, donc convergente.

Q 3.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^\alpha)^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^\alpha)^{n+1}}{1-(-t^\alpha)}\,\mathrm{d}t$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison différente de 1).

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = F(\alpha) - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = F(\alpha) - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Donc $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

b) Plusieurs façons de faire : la plus simple est un encadrement.

Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha} \leqslant t^{\alpha(n+1)}$ donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\alpha(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\alpha+1}$.

D'après le th. d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha(n+1)}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0$ (produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0).

On sait aussi que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha)$ converge, autrement dit ses sommes partielles convergent vers la somme de la série, donc par passage à la limite dans l'égalité **Q 3a**, on en déduit que $F(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

Q 4.

a) Comme $1-\alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^{1-\alpha}$ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, strictement décroissante et réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $]0,1]$, donc d'après le th. de changement de variables dans les intégrales généralisées, on a en posant $u = t^{1-\alpha}$ donc $t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\,\mathrm{d}u$:

$$G(\alpha) = \int_1^0 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \times \frac{1}{1-\alpha} u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 \frac{u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}+1}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha-1} F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

b) D'après la question **Q 3**, $F(\alpha)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ et donc en remplaçant α par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ (qui est aussi strictement plus grand que 1), on a aussi $F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1}+1}=(\alpha-1)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha-1}=(\alpha-1)\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha-1}$

Donc $G(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}F\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)=\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha-1}$.

Q 5. Les intégrales $\int_0^1\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{1+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent, donc par définition, comme $t\mapsto\frac{1}{1+t^\alpha}$ est continue sur $[0,+\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge et elle vaut $\int_0^1\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t+\int_1^{1+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t=F(\alpha)+G(\alpha)$.

Donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j\alpha+1}+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j\alpha-1}=1+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j\alpha+1}-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{j\alpha-1}=1+\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{j\alpha+1}-\frac{1}{j\alpha-1}\right)=$ $1+\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\frac{-2}{j^2\alpha^2-1}=1+2\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{\alpha^2j^2-1}$

II.

Q 6. $\sum_{k=-n}^{+n}z^{2k}=z^{-2n}\sum_{k=-n}^{+n}z^{2k+2n}=z^{-2n}\sum_{k=-n}^{+n}(z^2)^{k+n}=z^{-2n}\sum_{j=0}^{+2n}(z^2)^j=z^{-2n}\frac{1-(z^2)^{2n+1}}{1-z^2}$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $z^2\neq1$)

donc $\sum_{k=-n}^{+n}z^{2k}=\frac{\frac{1}{z^{2n}}-z^{2n+2}}{1-z^2}=\frac{\frac{1}{z^{2n+1}}-z^{2n+1}}{\frac{1}{z}-z}=\frac{z^{2n+1}-\frac{1}{z^{2n+1}}}{z-\frac{1}{z}}$

Q 7.

a) $\sum_{k=-n}^{+n}e^{ikx}=\sum_{k=-n}^{-1}e^{ikx}+1+\sum_{k=1}^{+n}e^{ikx}=1+\sum_{k=1}^{+n}e^{i(-k)x}+\sum_{k=1}^{+n}e^{ikx}=1+\sum_{k=1}^{+n}(e^{-ikx}+e^{ikx})=1+\sum_{k=1}^{+n}2\cos(kx)$

b) On utilise le résultat de la question **Q 6** en posant $z=e^{ix/2}$ (remarque : comme $x\in]0,\pi]$, on a bien z différent de 0, 1 et -1).

Alors

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\sum_{k=-n}^{+n}z^{2k}=\frac{(e^{ix/2})^{2n+1}-\frac{1}{(e^{ix/2})^{2n+1}}}{e^{ix/2}-\frac{1}{e^{ix/2}}}=\frac{e^{i(2n+1)\frac{x}{2}}-e^{-i(2n+1)\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}=\frac{2i\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{2i\sin(\frac{x}{2})}$$

Donc $1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$, puis $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$.

Q 8. La fonction $x\mapsto\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$ est continue sur $]0,\pi]$ et est prolongeable par continuité en 0 en lui donnant la valeur $\frac{2n+1}{2}$. Donc l'intégrale J_n converge (fausse singularité en 0).

D'après **Q 7**, $J_n=\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi\cos(kx)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{x=0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}$.

III.

Q 9. Sur $]0,\pi]$, φ est le quotient de deux fonctions de classe C^1 donc elle est de classe C^1.

On peut noter que φ est continue en 0, car $\cos(ax)-1\underset{x\to0}{\sim}\frac{-(ax)^2}{2}$ et $2\sin\frac{x}{2}\underset{x\to0}{\sim}x$ donc $\varphi(x)\underset{x\to0}{\sim}-\frac{a^2}{2}x$.

Enfin, pour tout $x\in]0,\pi]$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2}\frac{(-a\sin(ax))\sin\frac{x}{2}-(\cos(ax)-1)\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{2})^2}$.

Grâce à quelques d.l. en 0 à l'ordre 2, on peut calculez $\lim_{x\to 0}\varphi'(x)$:

$\sin(ax) = ax + o(x^2)$, $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x^2)$ donc $(-a\sin(ax))\sin\frac{x}{2} = \dfrac{-a^2x^2}{2} + o(x^2)$

$\cos(ax) - 1 = \dfrac{-a^2x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos\frac{x}{2} = 1 - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$ donc $(\cos(ax)-1)\dfrac{1}{2}\cos\frac{x}{2} = \dfrac{-a^2x^2}{2} + o(x^2)$

donc le numérateur $(-a\sin(ax))\sin\frac{x}{2} - (\cos(ax)-1)\dfrac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$ a pour d.l. $\quad -\dfrac{a^2}{4}x^2 + o(x^2)$

or le dénominateur $(\sin\frac{x}{2})^2$ est équivalent à $\dfrac{x^2}{4}$ donc le quotient $\varphi'(x)$ a pour limite $-\dfrac{a^2}{2}$ quand $x \to 0$.

On résume : φ est continue sur le segment $[0,\pi]$, est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ et sa dérivée possède une limite réelle en 0, donc d'après le th. de limite de la dérivée (= th. de prolongement C^1), φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

Tout ça, c'est du programme de Première Année !

Q 10. $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \varphi(x)\sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \varphi(x)\psi'(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $\psi(x) = -\dfrac{2}{2n+1}\cos\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)$.

D'après la question précédente, φ est de classe C^1 sur $(0,\pi]$, tout comme ψ : on peut donc intégrer par parties.

$$I_n = \Big[\varphi(x)\psi(x)\Big]_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \varphi'(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \varphi'(x)\cos\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

Donc par inégalité triangulaire, $|I_n| \leqslant \dfrac{2}{2n+1}\displaystyle\int_0^\pi |\varphi'(x)|.\left|\cos\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)\right|\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{2}{2n+1}\int_0^\pi |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x = \dfrac{K}{2n+1}$ où K est une constante indépendante de n.

Par encadrement, on en déduit que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Q 11.

a) $\cos(ax)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}\left(\cos((a+n)x) + \cos((a-n)x)\right)$ donc comme $a+n \neq 0$ et $a-n \neq 0$,

$$v_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((a+n)x)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)x}{a-n}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((a+n)\pi)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)\pi}{a-n}\right)$$

or $\sin(t+n\pi) = \sin(t-n\pi) = (-1)^n\sin t$ donc $v_n = \dfrac{(-1)^n}{2}\left(\dfrac{\sin(\pi a)}{a+n} + \dfrac{\sin(\pi a)}{a-n}\right) = \dfrac{(-1)^n\, a\sin(\pi a)}{a^2-n^2}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k = \int_0^\pi \cos(ax)\sum_{k=1}^n \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(ax)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$ d'après la partie précédente.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k = \int_0^\pi \cos(ax)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(ax)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_0^\pi (\cos(ax)-1)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(ax)}{a}\right]_{x=0}^{\pi} = I_n + J_n - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$$

Q 12. On sait que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $J_n = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$.

Autrement dit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}$.

Q 13. Soit $\alpha > 1$, on pose $a = \dfrac{1}{\alpha} \in]0,1]$: on peut donc utiliser les résultats précédents.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,\frac{1}{\alpha}\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{(\frac{1}{\alpha})^2 - n^2}$ donc $\displaystyle\frac{1}{\alpha}\sin(\tfrac{\pi}{\alpha})\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(\frac{1}{\alpha})^2-n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2}$

donc $\displaystyle\alpha\sin(\tfrac{\pi}{\alpha})\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-\alpha^2n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2n^2-1} = \frac{\pi}{2\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})} - \frac{1}{2}$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^2n^2-1}$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 1 + 2\left(\frac{\pi}{2\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}$$

IV.

Q 14. Soit $f \in E$. Il existe alors $M > 0$ tel que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|f(t)| \leqslant M$, donc $\dfrac{|f(t)|}{1+t^\alpha} \leqslant \dfrac{M}{1+t^\alpha}$.

Or comme $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Q 15. D'abord, pour $f \in E$, l'existence de $\|f\|_\infty$ est justifiée par le fait que f est bornée.
- Si $\|f\|_\infty = 0$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant |f(t)| \leqslant \|f\|_\infty = 0$ donc $f = 0$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, alors $\|\lambda f\|_\infty = \sup\limits_{[0,+\infty[} |\lambda f| = \sup\limits_{[0,+\infty[} |\lambda|.|f| = |\lambda| \sup\limits_{[0,+\infty[} |f|$ car multiplier par $|\lambda|$, réel positif, conserve les inégalités donc la borne sup., donc $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$.
- Si $(f, g) \in E^2$, alors pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|f(t) + g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$,

  donc $\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Au total, $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

Q 16. Par linéarité de l'intégrale, Φ est clairement une forme linéaire sur E. De plus, d'après la question **Q 14**, pour tout $f \in E$, $|\Phi(f)| \leqslant \|f\|_\infty \times \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt$ (inégalité *)

Ceci prouve que Φ est continue et que sa norme subordonnée est inférieure ou égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt$. Or si f est la fonction constante égale à 1, il y a égalité dans l'inégalité *, donc la norme subordonnée vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt$.

Q 17. Si $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} |f| = 0$, alors comme la fonction $|f|$ est continue, positive et d'intégrale nulle, elle est nulle d'après le th. de stricte positivité de l'intégrale.

L'égalité $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\|f\|_1$ découle de la linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire $\|f + g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$ découle de l'inégalité triangulaire sur les valeurs absolues et de la croissance de l'intégrale.

Au total, $\|\ \|_1$ est une norme sur E.

Q 18. Φ est encore une forme linéaire sur E' et pour tout $f \in E'$,

$$|\Phi(f)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{f(t)}{1+t^\alpha}\right|\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1.$$

Donc Φ est continue sur E' et sa norme subordonnée est au plus égale à 1.

Q 19. h_β est continue et affine par morceaux. Un simple calcul montre que $\|h_\beta\|_1 = \beta + \dfrac{\beta^2}{2}$.

De plus, $\Phi(h_\beta) = \displaystyle\int_0^\beta \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_\beta^{\beta+\beta^2} \frac{h_\beta(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \varphi(\beta) - \varphi(0) + \int_\beta^{\beta+\beta^2} \frac{h_\beta(t)}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$

On note $v_\beta = \displaystyle\int_\beta^{\beta+\beta^2} \frac{h_\beta(t)}{1+t^\alpha}\,dt$. Par simple encadrement, on a $0 \leqslant v_\beta \leqslant \beta^2$.

Donc $\dfrac{|\Phi(h_\beta)|}{\|h_\beta\|_1} = \dfrac{\varphi(\beta) - \varphi(0) + v_\beta}{\beta + \frac{\beta^2}{2}} \underset{\beta\to 0}{\sim} \dfrac{\varphi(\beta) - \varphi(0) + v_\beta}{\beta}$.

Comme $\lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{v_\beta}{\beta} = 0$ par encadrement et $\lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{\varphi(\beta) - \varphi(0)}{\beta} = 1$ par définition de φ, on en déduit que $\lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{|\Phi(h_\beta)|}{\|h_\beta\|_1} = 1$.

Grâce à l'inégalité de **Q 18**, on en déduit que la norme subordonnée de $\Phi : E' \to \mathbb{R}$ est égale à 1.