Problème 1 - Un peu de topologie des ensembles de matrices

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
- $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;
- $SL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices de déterminant 1 ;
- $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

I. Transvections et dilatations

Soit $n \geqslant 2$.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$, appelée matrice de transvection.

Q 1. Montrer que $T_{i,j}(\lambda) \in SL_n(\mathbb{R})$: que vaut $T_{i,j}(\lambda)^{-1}$?

Q 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Expliquez comment obtenir $A.T_{i,j}(\lambda)$ et $T_{i,j}(\lambda).A$ à partir de A en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes de A.

Q 3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux matrices P, Q qui sont des produits de matrices de transvections telles que $B = (b_{i,j}) = PAQ$ vérifie : $b_{1,1} = 1$ et pour tout $j \geqslant 2$, $b_{1,j} = b_{j,1} = 0$.

Q 4. Montrer que toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est un produit de matrices de transvection.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on note $D_i(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, appelée matrice de dilatation.

Q 5. Montrer que toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ est un produit de matrices de tranvection ou de dilatation.

II. Propriétés topologiques de quelques ensembles de matrices

Q 6. Les ensembles $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$ sont-ils ouverts ou fermés ?

Q 7. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est d'intérieur vide et que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Q 8. Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Pourquoi $GL_n(\mathbb{R})$ n'est-il pas connexe par arcs ?

Q 9. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs.

Pour $r \in [\![1,n]\!]$, on note $\mathscr{E}_r$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et $\mathscr{F}_r$ celui des matrices de rang inférieur ou égal à r.

Q 10. Montrer que $\mathscr{F}_r$ est connexe par arcs.

Q 11. Pour quelles valeurs de r $\mathscr{E}_r$ est-il connexe par arcs ?

Q 12. Montrer que si $r \leqslant n-1$, $\mathscr{E}_r$ est d'intérieur vide et que l'adhérence de $\mathscr{E}_r$ est $\mathscr{F}_r$.

Problème 2 - D'après ENS MP-MPI 2024

Deux parties sur les trois du sujet original.

Notations

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, ce que l'on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k,$$

et la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Si la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} S_N,$$

et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geqslant 0, \quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note

$$\mathscr{C}^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \ ; f \text{ continue sur } I\},$$

$$\mathscr{C}_b^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \ ; f \text{ continue et bornée sur } I\}.$$

I. Lemme de Cesàro

Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Cesàro, voir question 1, d'en proposer des applications et d'établir certains variantes puis des réciproques partielles.

Q 1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} \sigma_n = \ell \right). \tag{Cesàro}$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Applications.

Q 2. En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$. Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n \geqslant 1}$.

Q 3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} e_n = \alpha$. En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

Q 4. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

Q 5. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ et $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = ab.$$

Q 6. Soient $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives A et B. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées définie par $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_k \right) = AB. \tag{Cauchy}$$

Réciproques partielles.

Q 7. Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Q 8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right).$$

Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Q 9. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right). \qquad \text{(Hardy faible)}$$

Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Q 10. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell\right). \qquad \text{(Hardy fort)}$$

On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

a) Soit $0 \leqslant n < m$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j.$$

b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leqslant n < m$ on a

$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}\left(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|\right).$$

c) En déduire (Hardy fort). *Indication : on pourra prendre* $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ *avec un paramètre* $\alpha > 1$ *à choisir, où* $\lfloor x \rfloor$ *désigne la partie entière de* $x \in \mathbb{R}$.

II. Variantes continues du lemme de Cesàro

Le but de cette partie est d'étudier des versions continues du lemme de Cesàro et de leurs réciproques partielles.

Q 11. Soient $f \in \mathscr{C}^0(]0, +\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell\right).$$

Q 12. À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que la réciproque du résultat de la question 11 est fausse.

Q 13. Soient $f \in \mathscr{C}^0(]0, +\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\right).$$

Q 14. Soit $f \in \mathscr{C}_b^0(]0, +\infty[)$. On définit la transformée de Laplace de f par la fonction

$$\mathscr{L}(f) : t \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est bien définie, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $\mathscr{L}(f)'(t) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Q 15. Soit $f \in \mathscr{C}_b^0(]0, +\infty[)$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}\right) \Longrightarrow \left(\lim_{t\to 0^+} \mathscr{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

a) Démontrer que la fonction

$$F : x \in [0, +\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie $F' = -f$.

b) Démontrer que $\lim\limits_{t \to 0^+} \mathscr{L}(f)(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.

Q 16. Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Problème 1

I.

Q 1. La matrice $T_{i,j}(\lambda)$ est triangulaire et sa diagonale ne contient que des 1, donc $\det T_{i,j}(\lambda) = 1$, *i.e.* $T_{i,j}(\lambda) \in SL_n(\mathbb{R})$.

De plus, il est facile de vérifier que $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$, car $T_{i,j}(\lambda).T_{i,j}(-\lambda) = (I_n+\lambda E_{i,j}).(I_n-\lambda E_{i,j}) = I_n-\lambda^2 E_{i,j}^2$, or comme $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0$ donc $T_{i,j}(\lambda).T_{i,j}(-\lambda) = I_n$.

Q 2. Simple vérification : $A.T_{i,j}(\lambda)$ est obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$; $T_{i,j}(\lambda).A$ est obtenue à partir de A en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Q 3. On étudie plusieurs cas.

— Si $a_{1,1} = 1$, alors en effectuant les opérations $C_j \leftarrow C_j - a_{1,j}C_1$ pour $j \geqslant 2$, on obtient des 0 sur la première ligne et en effectuant les opérations $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$ pour $i \geqslant 2$, on obtient des 0 sur la première colonne; or d'après ce qui précède, on peut traduire les opérations élémentaires en produit à gauche ou à droite par produits par des matrices de transvection, donc il existe P, Q, produits de matrices de transvections telles que $B = (b_{i,j}) = PAQ$ vérifie : $b_{1,1} = 1$ et pour tout $j \geqslant 2$, $b_{1,j} = b_{j,1} = 0$.

— Si $a_{1,1} \neq 1$ et s'il existe sur la première ligne un autre coefficient non nul $a_{1,j}$ ($j \geqslant 2$), alors en effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - \dfrac{1-a_{1,1}}{a_{1,j}}C_j$, on obtient un 1 en haut à droite : on est ramené au cas précédent en travaillant à partir d'un produit $A.T$.

— Si $a_{1,1} \neq 1$ et s'il existe sur la première colonne un autre coefficient non nul $a_{i,1}$ ($i \geqslant 2$), alors en effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{1-a_{1,1}}{a_{i,1}}C_i$, on obtient un 1 en haut à droite : on est ramené au premier cas en travaillant à partir d'un produit $T.A$.

— Enfin, si $a_{1,1} \neq 1$ et pour tout $j \geqslant 2$, $a_{1,j} = a_{j,1} = 0$, alors comme A est inversible, il existe au moins un autre élément non nul $a_{i,j}$ avec $i, j \geqslant 2$; en effectuant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + a_{i,j}L_i$, on ramène un coefficient non nul en position $(1, j)$ sans avoir changé $a_{1,1}$ et on est ramené au deuxième cas en travaillant à partir d'un produit $T.A$.

Dans tous les cas, on peut donc trouver P, Q, produits de matrices de transvections telles que $B = (b_{i,j}) = PAQ$ vérifie : $b_{1,1} = 1$ et pour tout $j \geqslant 2$, $b_{1,j} = b_{j,1} = 0$.

Q 4. Par récurrence sur n. On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat « toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est un produit de matrices de transvection ».

$\mathscr{P}(1)$ est vraie car la seule matrice de $SL_1(\mathbb{R})$ est la matrice (1), produit de 0 matrices de transvection.

Si $\mathscr{P}(n-1)$ est vraie ($n \geqslant 2$), alors soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, il existe P, Q, produits de matrices de transvections telles que $B = (b_{i,j}) = PAQ$ vérifie : $b_{1,1} = 1$ et pour tout $j \geqslant 2$, $b_{1,j} = b_{j,1} = 0$.

B est donc par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $C \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Comme $\det P = \det Q = 1$ (voir **Q 1**), $\det B = \det A = 1$ donc $\det C = 1$: $C \in SL_{n-1}(\mathbb{R})$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $T_1, \ldots, T_k$ matrices de transvection de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ telles que $C = T_1 \ldots T_k$.

Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on pose $T'_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_i \end{pmatrix}$, matrice de transvection de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on a alors par produit par blocs $B = PAQ = T'_1 \ldots T'_k$.

Donc $A = P^{-1}T'_1 \ldots T'_k Q^{-1}$ et on a vu en **Q 1** que l'inverse d'une matrice de transvection est encore une matrice de transvection, donc P^{-1} et Q^{-1} sont des produits de matrices de transvection : $\mathscr{P}(n)$ est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Q 5. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $d = \det A \neq 0$. On pose $D = D_1(d)$ et $B = D^{-1}A$: alors $B \in SL_n(\mathbb{R})$ est un produit de matrices de transvection et donc $A = DB$ est un produit de matrices de tranvection ou de dilatation. Remarque : le choix de D_1 plutôt que D_i quelconque est arbitraire.

II.

Q 6. L'application det est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme application polynômiale en les coefficients. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est l'image réciproque d'un ouvert et $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$ est l'image réciproque d'un fermé, donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert et $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

Q 7. Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. On choisit une suite (u_k) à termes dans $[0,1[$ qui converge vers 1. Alors la suite $(u_k A)_{k\in\mathbb{N}}$ n'a aucun terme dans $SL_n(\mathbb{R})$ (car $\det(u_k A) = u_k^n \det A = u_k^n \neq 1$) et converge vers A. Donc dans toute boule ouverte de centre A, on peut trouver une matrice de cette suite, ce qui interdit à la boule d'être incluse dans $SL_n(\mathbb{R})$. Conclusion : $SL_n(\mathbb{R})$ n'a aucun point intérieur, *i.e.* son intérieur est vide.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors A est équivalente à la matrice $J_r = \mathrm{diag}(I_r, 0_{n-r})$ (matrice diagonale par blocs) : il existe P, Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$. On pose alors pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = P\,\mathrm{diag}(I_r, \frac{1}{2^k} I_{n-r})Q$: la suite (A_k) est alors à termes dans $GL_n(\mathbb{R})$ et converge vers A. Ceci prouve que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

Q 8. Soit $A \in SL_n(\mathbb{R})$. D'après la partie 1, il existe des matrices de transvection $T(\lambda_1), \dots, T(\lambda_k)$ telles que $A = T(\lambda_1)\dots T(\lambda_k)$. Pour $t \in [0,1]$, on pose alors $\varphi(t) = T(t\lambda_1)\dots T(t\lambda_k)$. L'application φ est alors continue sur $[0,1]$, à termes dans $SL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi(0) = I_n$, $\varphi(1) = A$. Ceci prouve que toute matrice de $SL_n(\mathbb{R})$ est en relation de connexité avec I_n (relation d'équivalence), donc toutes les matrices de $SL_n(\mathbb{R})$ sont en relation : $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Si $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, alors comme det est continue, son image $\mathbb{R}^* = \det(GL_n(\mathbb{R}))$ est aussi connexe par arcs, ce qui est faux. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Q 9. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\det A = d > 0$. D'après **Q 5**, il existe des matrices de transvection $T(\lambda_1), \dots, T(\lambda_k)$ telles que $A = D_1(d)T(\lambda_1)\dots T(\lambda_k)$. Pour $t \in [0,1]$, on pose alors $\varphi(t) = D_1(td+1-t)T(t\lambda_1)\dots T(t\lambda_k)$. L'application φ est alors continue sur $[0,1]$, à termes dans $GL_n(\mathbb{R})$ et toutes ses valeurs ont un déterminant strictement positif et $\varphi(0) = I_n$, $\varphi(1) = A$. Ceci prouve que toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ à déterminant strictement positif est en relation de connexité avec I_n (relation d'équivalence), donc toutes ces matrices sont en relation : $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est connexe par arcs.

De même, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\det A = d < 0$, alors A est en relation avec $\mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, donc $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ est connexe par arcs.

Comme $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ forment une partition de $GL_n(\mathbb{R})$ en deux ensembles connexes par arcs et qu'aucune matrice du premier ne peut être en relation avec une du second (sinon le déterminant s'annulerait sur le chemin les reliant par th. des valeurs intermédiaires), ce sont donc les deux composantes connexes par arcs de $GL_n(\mathbb{R})$.

Q 10. Soit $A \in \mathscr{F}_r$: on note $s = \mathrm{rg}(A) \leqslant r$. Alors A est équivalente à la matrice $J_s = \mathrm{diag}(I_s, 0_{n-s})$ (matrice diagonale par blocs) : il existe P, Q inversibles telles que $A = PJ_sQ$. On pose alors pour $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = P\,\mathrm{diag}(tI_s, 0_{n-s})Q$: l'application φ est alors continue sur $[0,1]$, à termes dans $\mathscr{F}_r$ et $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = A$. Ceci prouve que toutes les matrices de $\mathscr{F}_r$ sont en relation avec la matrice nulle, donc $\mathscr{F}_r$ est connexe par arcs.

Q 11. D'après **Q 8**, $\mathscr{E}_n = GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

Soit $r \leqslant n-1$. Soit $A \in \mathscr{E}_r$. A est équivalente à la matrice J_r : il existe P, Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$.

— Premier cas : $\det P > 0$ et $\det Q > 0$. D'après **Q 9**, il existe φ et ψ continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ telles que $\varphi(0) = I_n = \psi(0)$ et $\varphi(1) = P$, $\psi(1) = Q$. L'application $t \mapsto \varphi(t)J_r\psi(t)$ est alors un chemin continu qui relie A et J_r dans $\mathscr{E}_r$.
— Deuxième cas : $\det P > 0$ et $\det Q < 0$. D'après **Q 9**, il existe φ et ψ continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ telles que $\varphi(0) = I_n$, $\varphi(1) = P$, $\psi(0) = D_n(-1)$, $\psi(1) = Q$. L'application $t \mapsto \varphi(t)J_r\psi(t)$ est alors un chemin continu qui relie A et J_r dans $\mathscr{E}_r$ car $J_rD_n(-1) = J_r$.
— Troisième cas : $\det P < 0$ et $\det Q > 0$. On fait de même en échangeant les rôles de P et Q car on a toujours $D_n(-1)J_r = J_r$.
— Dernier cas : $\det P < 0$ et $\det Q < 0$. On fait de même avec deux chemins dans $GL_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ qui relient P et Q à $D_n(-1)$, car $D_n(-1)J_rD_n(-1) = J_r$.

Dans tous les cas, on a relié A et J_r. Donc $\mathscr{E}_r$ est connexe par arcs.

Conclusion : $\mathscr{E}_r$ est connexe par arcs si et s.si $r \leqslant n-1$.

Q 12. Soit $A \in \mathscr{E}_r$. Alors A est équivalente à la matrice J_r : il existe P, Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$. La suite des matrices $A_k = P\,\mathrm{diag}(I_r, \frac{1}{2^k} I_{n-r})Q$ est une suite de matrices inversibles (donc qui ne sont pas dans $\mathscr{E}_r$) qui converge vers A. Comme en **Q 7**, ceci prouve que l'intérieur de $\mathscr{E}_r$ est vide.

Soit $A \in \mathscr{F}_r$: on note $s = \mathrm{rg}(A) \leqslant r$. Alors A est équivalente à la matrice $J_s = \mathrm{diag}(I_s, 0_{n-s})$: il existe P, Q inversibles telles que $A = PJ_sQ$. On pose alors pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = P\,\mathrm{diag}(I_s, \frac{1}{2^k} I_{r-s}, 0_{n-r})Q$: la suite (A_k) est à termes dans E_r et converge vers A, donc $A \in \overline{\mathscr{E}_r}$. Ceci prouve $\mathscr{F}_r \subset \overline{\mathscr{E}_r}$.

Pour la réciproque, on utilise le résultat suivant : une matrice est de rang au moins r si et s.si il existe une matrice carrée de taille (r,r) extraite de A de déterminant non nul (pour le sens direct, il suffit d'extraire des familles de cardinal r des deux familles des colonnes et des lignes ; pour le sens réciproque, l'hypothèse prouve que la famille des lignes est de rang au moins r puisqu'elle contient une famille libre de cardinal r). Par contraposée, toutes les matrices extraites de taille (r,r) sont de déterminant nul si et s.si le rang est strictement inférieur à r.

Soit donc $A \in \overline{\mathscr{E}_r}$. Il existe une suite de matrices de rang r (A_k) qui converge vers A. Soit I, J deux sous-ensembles de cardinal $r+1$ de $[\![1,n]\!]$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, le déterminant $\Delta_{I,J}(A_k)$ de la matrice extraite de A_k en sélectionnant les numéros de lignes conservées dans I et les numéros de colonnes dans J est donc nul. Or $\Delta_{I,J}(A_k)\xrightarrow[k\to+\infty]{}\Delta_{I,J}(A)$ par continuité du déterminant, donc $\Delta_{I,J}(A)=0$. Ceci prouve que toutes les matrices de taille $(r+1,r+1)$ extraites de A sont de déterminant nul, donc que $\operatorname{rg}(A)\leqslant r$, *i.e.* $A\in\mathscr{F}_r$. Donc on a montré l'inclusion $\overline{\mathscr{E}_r}\subset\mathscr{F}_r$.

Au total, on a l'égalité $\mathscr{F}_r=\overline{\mathscr{E}_r}$.

Problème 2

Corrigé d'Adrien Joseph, merci à lui.

I.

Q 1. Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ. Puisque $u_n-\ell=o(1)$ et que $\sum 1$ est une série divergente à termes positifs, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell)=o\left(\sum_{k=0}^{n}1\right)$, *i.e.* que $(n+1)(\sigma_n-\ell)=o(n+1)$. Ainsi $\boxed{(\sigma_n) \text{ converge vers } \ell \text{ si } (u_n) \text{ converge vers } \ell}$

Supposons maintenant que la suite de nombres réels (u_n) tende vers $+\infty$. Alors $1=o(u_n)$ et $\sum u_n$ est une série (grossièrement) divergente à termes positifs (à partir d'un certain rang) On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}1=o\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)$, *i.e.* que $n+1=o((n+1)\sigma_n)$, ce qui montre que la suite $(|\sigma_n|)$ tend vers $+\infty$. Or, comme $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ donc $\sigma_n\geqslant 0$ à partir d'un certain rang. On en déduit que $\boxed{(\sigma_n) \text{ tend vers } +\infty \text{ si } (u_n) \text{ tend vers } +\infty}$.

En considérant la suite $(-u_n)$, on montre que $\boxed{(\sigma_n) \text{ tend vers } -\infty \text{ si } (u_n) \text{ tend vers } -\infty}$.

Remarque. Cette question est assez étrange puisque le théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie) est désormais explicitement au programme de MP et de MPI.

Q 2. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, le lemme de Cesàro assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=0$, *i.e.* $\boxed{(v_n) \text{ converge vers } 0}$.

Soit n et k des éléments de $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour tout $t\in[k-1,k]$, $\dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{1}{t}\leqslant\dfrac{1}{k-1}$ donc, en intégrant sur le segment $[k-1,k]$, $\dfrac{1}{k}\leqslant\ln k-\ln(k-1)\leqslant\dfrac{1}{k-1}$. En sommant la première majoration pour k variant de 2 à n et la seconde pour k variant de de 2 à $n+1$, on obtient $\ln(n+1)\leqslant nv_n\leqslant\ln n+1$, donc $\ln n\leqslant nv_n\leqslant\ln n+1$ puis $1\leqslant\dfrac{nv_n}{\ln n}\leqslant 1+\dfrac{1}{\ln n}$.
Le théorème des gendarmes assure alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{nv_n}{\ln n}=1$, *i.e.* $\boxed{v_n\sim\frac{\ln n}{n}}$.

Q 3. Comme la suite (e_n) converge vers α, le lemme de Cesàro assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e_k=\alpha$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_0}{n}=\alpha$.
Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_0}{n}=0$. Par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\alpha$, donc, comme $\alpha\neq 0$, $\boxed{u_n\sim\alpha n}$.

Puisque $u_{n+1}-u_n\sim\alpha$ et que $\sum\alpha$ est une série (grossièrement) divergente dont les termes gardent un signe constant, on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)\sim\sum_{k=0}^{n-1}\alpha$, *i.e.* $u_n-u_0\sim\alpha n$. En particulier $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$ donc $u_n-u_0\sim u_n$. Finalement, $\boxed{u_n\sim\alpha n}$.

Q 4. raitons les cas $\ell\in\,]0,+\infty[$, $\ell=0$ et $\ell=+\infty$ ensemble en décrétant que $\ln(0)=-\infty$ et que $\ln(+\infty)=+\infty$ et en supposant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$. Avec notre convention, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)=\ln(\ell)$ donc d'après le lemme de Cesàro, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln(u_{k+1})-\ln(u_k)=\ln(\ell)$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)-\ln(u_0)}{n}=\ln(\ell)$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_0)}{n}=0$. Par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{n}=\ln(\ell)$, *i.e.* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(\sqrt[n]{u_n})=\ln(\ell)$. On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell}$.

En considérant la suite $(n!)$, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty}$.

Enfin, comme
$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\exp(1+o(1))=e+o(1)$$
on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}=e$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=e}$.

Q 5. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=a_n-a$ et $v_n=b_n-b$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On remarque que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(a+u_k)(b+v_{n-k})=ab+\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n}v_k+\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n}u_k+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, le lemme de Cesàro assure que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}v_k=0$. De même, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}u_k=0$. Montrons pour finir que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=0$. Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, elles sont bornées : on dispose de $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\leqslant M$ et $|v_n|\leqslant M$. Soit $\varepsilon>0$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, on dispose de $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $|u_n|\leqslant\varepsilon$ et $|v_n|\leqslant\varepsilon$. Pour tout $n\geqslant 2n_0$, on a donc :
$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}|u_k||v_{n-k}|+\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}|u_k||v_{n-k}|\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}M\times\varepsilon+\frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0+1}^{n}\varepsilon\times M=M\varepsilon,$$

ce qui montre par définition de la limite (rappelons que le réel M ne dépend pas de ε) que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=0$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=0$. Finalement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=ab}$.

Q 6. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k$. D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}=AB$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}&=\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2\\k+\ell=n}}A_kB_\ell=\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2\\k+\ell=n}}\sum_{\substack{i\in[\![0,n]\!]\\i\leqslant k}}\sum_{\substack{j\in[\![0,n]\!]\\j\leqslant\ell}}a_ib_j=\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j\leqslant n}}a_ib_j\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![i,n]\!]\times[\![j,n]\!]\\k+\ell=n}}1\\&=\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j\leqslant n}}\mathrm{card}\left(\{(k,\ell)\in[\![i,n]\!]\times[\![j,n]\!]\,;\,k+\ell=n\}\right)a_ib_j\\&=\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j\leqslant n}}\mathrm{card}\left(\{(k,n-k)\,;\,k\in[\![i,n-j]\!]\}\right)a_ib_j\\&=\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j\leqslant n}}(n-i-j+1)a_ib_j\end{aligned}$$

et
$$\sum_{k=0}^{n}C_k=\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\sum_{\substack{\ell\in[\![0,n]\!]\\\ell\leqslant k}}\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j=\ell}}a_ib_j=\sum_{k\in[\![0,n]\!]}\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j\leqslant k}}a_ib_j=\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j\leqslant n}}a_ib_j\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\k\geqslant i+j}}1=\sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2\\i+j\leqslant n}}(n-i-j+1)a_ib_j.$$

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}C_k$. On conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}C_k=AB}$.

Q 7. Considérons la suite $\boxed{(u_n)=((-1)^n)}$. Alors la suite (u_n) ne converge pas et comme, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sigma_{2n}=\frac{1}{2n+1}$ et $\sigma_{2n+1}=0$, la suite (σ_n) converge (vers 0).

Q 8. Supposons d'emblée que $\ell\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, que (σ_n) tend vers ℓ et que (u_n) est monotone. Cette dernière hypothèse assure que (u_n) tend vers une limite $\ell'\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, donc d'après la question **1**, (σ_n) tend vers ℓ'. Comme (σ_n) tend vers ℓ, l'unicité de la limite assure que $\ell'=\ell$ donc $\boxed{(u_n)\text{ tend vers une }\ell}$.

Q 9. L'indication peut se montrer via un calcul direct mais une récurrence immédiate donne le résultat encore plus rapidement : l'initialisation vient de la définition de e_1 et si $n \geqslant 1$ est tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k$, alors

$$\sum_{k=0}^{n+1} ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k + (n+1)e_{n+1} = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k + (n+1)(u_{n+2} - u_{n+1}) = (n+1)u_{n+2} - \sum_{k=1}^{n} u_k - u_{n+1},$$

ce qui prouve l'hérédité. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k}$.

Supposons maintenant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \ell$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ne_n = 0$. Alors d'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} ke_k + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} u_k = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ke_k + \frac{n}{n-1} \times \sigma_{n-1} - \frac{u_0}{n-1}.$$

Or, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ne_n = 0$, le lemme de Cesàro assure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ke_k = 0$. Comme d'autre part $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n-1} = \ell$, on en déduit finalement que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

Q 10.

a) Ici encore, un calcul direct peut aboutir mais une récurrence sur $m \geqslant n+1$ (à $n \in \mathbb{N}$ fixé) donne le résultat plus rapidement : l'initialisation vient de la définition de e_n et si $m \geqslant n+1$ est tel que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$ (remarquons que cette dernière somme peut aussi s'arrêter à $j = m$), alors

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} u_k - (m+1-n)u_n = u_{m+1} - u_n + \sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m} (u_{j+1} - u_j) + \sum_{j=n}^{m} (m-j)e_j = \sum_{j=n}^{m} (e_j + (m-j)e_j)$$

ce qui prouve l'hérédité. Finalement, $\boxed{\text{pour tous } n \geqslant 0 \text{ et } m > n, \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j}$.

b) Soit n et m des entiers tels que $2 \leqslant n < m$. Remarquons que $(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k$ donc, d'après la question précédente, $\displaystyle\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n = \frac{1}{m-n}\sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$ donc

$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant \frac{1}{m-n}\sum_{j=n}^{m-1} (m-j)|e_j| \leqslant \sum_{j=n}^{m-1} |e_j|.$$

Or, comme $e_j = O\left(\dfrac{1}{j}\right)$, on dispose d'une constante $C > 0$ (qui ne dépend donc pas de n ni de m) telle que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $|e_j| \leqslant \dfrac{C}{j}$. En exploitant l'inégalité « pour tout $j \geqslant 2$, $\dfrac{1}{j} \leqslant \ln j - \ln(j-1)$ » établie à la question **Q 2** (on peut aussi montrer cette inégalité en exploitant la concavité du logarithme), on a donc finalement :

$$\left|\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant \sum_{j=n}^{m-1} \frac{C}{j} \leqslant C\sum_{j=n}^{m-1} (\ln j - \ln(j-1)) = C(\ln(m-1) - \ln(n-1)) = C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right).$$

D'où, $\boxed{\text{en notant } C = 1 + \sup_{j\in\mathbb{N}^*} (j|e_j|) > 0, \text{ on a : pour tous } m > n \geqslant 2, \left|\dfrac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n\right| \leqslant C\ln\left(\dfrac{m-1}{n-1}\right)}$.

Soit n et m des entiers tels que $2 \leqslant n < m$. On écrit :

$$u_n - \ell = u_n - \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} + \frac{(m+1)(\sigma_m - \ell) - (n+1)(\sigma_n - \ell)}{m-n}.$$

donc, d'après ce qui précède :

$$|u_n - \ell| \leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (n+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n} \leqslant C\ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (m+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n}$$

donc $\boxed{\text{pour tous } n \geqslant 2 \text{ et } m > n,\ |u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m-1}{n-1}\right) + \frac{m+1}{m-n}(|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|)}$.

c) Soit $\alpha > 1$ (que l'on choisira ultérieurement). Posons pour tout $n \geqslant 2$, $m_n = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ (remarquons que $m_n > \alpha n > n$ et que m_n est un entier). D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$, on a donc :

$$|u_n - \ell| \leqslant C \ln\left(\frac{m_n - 1}{n-1}\right) + \frac{m_n + 1}{m_n - n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

Or, $m_n \sim \alpha n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{m_n-1}{n-1}\right) = \ln \alpha$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{m_n+1}{m_n-n} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_{m_n} = \ell$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} C \ln\left(\frac{m_n-1}{n-1}\right) + \frac{m_n+1}{m_n-n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) = C \ln \alpha.$$

Comme $C \ln \alpha < 2C \ln \alpha$, on dispose donc de $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$C \ln\left(\frac{m_n-1}{n-1}\right) + \frac{m_n+1}{m_n-n}(|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) \leqslant 2C \ln \alpha \quad \text{donc} \quad |u_n - \ell| \leqslant 2C \ln \alpha.$$

Finalement, pour tout $\alpha > 1$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 2C \ln \alpha$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\alpha = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2C}\right) > 1$, il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 2C \ln \alpha = \varepsilon$, ce qui montre que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

II.

Q 11. Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Puisque $f(x) - \ell = \underset{x\to+\infty}{o}(1)$, que $f - \ell$ est continue sur $[0, +\infty[$ et que la fonction constante égale à 1 est continue, positive et non intégrable sur $[0, +\infty[$, on sait que $\int_0^x (f(t) - \ell)\,\mathrm{d}t = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right)$, *i.e.* que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \ell x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$, ce qui montre que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell}$.

Q 12. Remarquons que $\cos \in \mathscr{C}^0([0, +\infty[)$, que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin x}{x}$ donc $\left|\frac{1}{x}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or, cos n'a pas de limite en $+\infty$. D'où $\boxed{\text{le résultat}}$.

Q 13. Quitte à écrire, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = (f(x) - \ell x) + \ell x$ et à établir le résultat demandé avec la fonction continue $x \geqslant 0 \mapsto f(x) - \ell x$ et le réel 0, on peut supposer que $\ell = 0$; supposons donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = 0$ et montrons que, alors, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. On écrit, pour tout $x \geqslant 0$:

$$f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor) + \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} f(x - \lfloor x \rfloor + k + 1) - f(x - \lfloor x \rfloor + k).$$

En posant $g : x \geqslant 0 \mapsto f(x+1) - f(x)$, on a donc, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x - \lfloor x \rfloor)}{x} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \times \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} g(x - \lfloor x \rfloor + k).$$

Or, la fonction g tend vers 0 en $+\infty$ donc on dispose de $A > 0$ tel que pour tout $x \in [A, +\infty[$, $|g(x)| \leqslant 1$ et par continuité de g sur le segment $[0, A]$, la restriction de g à $[0, A]$ est bornée ; on en déduit que g est bornée sur $[0, +\infty[$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|g\|_{\infty,[k,+\infty[} = \sup\limits_{x \geqslant k} |g(x)|$. Remarquons aussi que, par continuité de f sur le segment $[0, 1]$, la restriction de f à $[0, 1]$ est bornée ; notons $\|f\|_{\infty,[0,1]} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Nous pouvons donc maintenant remarquer que pour tout $x \geqslant 1$:

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\|f\|_{\infty,[0,1]}}{x} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \times \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \|g\|_{\infty,[k,+\infty[}.$$

Or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on a : $\lim\limits_{k\to+\infty} \|g\|_{\infty,[k,+\infty[} = 0$, donc d'après le lemme de Cesàro, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|g\|_{\infty,[k,+\infty[} = 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$, on en déduit finalement que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. D'où $\boxed{\text{le résultat}}$.

Q 14. Posons $g : (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[\mapsto e^{-tx} f(x)$. Alors :

- pour tout $x \in [0,+\infty[$, $t \in]0,+\infty[\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$,
- pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \in [0,+\infty[\mapsto g(x,t)$ est continue par continuité de f et intégrable puisque, comme f est bornée, $g(x,t) = \underset{x\to+\infty}{O}(e^{-tx})$ et que $x \in [0,+\infty[\mapsto e^{-xt}$ est positive et intégrable,
- pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \in [0,+\infty[\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = -xe^{-tx}f(x)$ est continue par continuité de f,
- pour tout $a \in]0,+\infty[$ et pour tout $(x,t) \in [0,+\infty[\times[a,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \|f\|_\infty xe^{-ax}$. Remarquons que la fonction continue $x \in [0,+\infty[\mapsto \|f\|_\infty xe^{-ax}$ est intégrale puisque, par croissance comparée $\|f\|_\infty xe^{-ax} = \underset{x\to+\infty}{O}(e^{-ax/2})$ et que $x \in [0,+\infty[\mapsto e^{-ax/2}$ est positive et intégrable.

Ainsi $\boxed{\text{la fonction } \mathscr{L}(f) \text{ est bien définie et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et pour tout } t>0,\ \mathscr{L}(f)'(t) = -\int_0^{+\infty} xe^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x}$.

Q 15.

a) La convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ assure que $\boxed{F \text{ est bien définie}}$. Remarquons par ailleurs que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f - \int_0^x f$. Comme la fonction f est continue, le théorème fondamental de l'analyse assure donc que la fonction $\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[}$ et que $\boxed{F' = -f}$. Enfin, comme la fonction F tend vers 0 en $+\infty$, on dispose de $A > 0$ tel que pour tout $x \in [A,+\infty[$, $|F(x)| \leqslant 1$ et par continuité de F sur le segment $[0,A]$, la restriction de F à $[0,A]$ est bornée ; on en déduit que $\boxed{F \text{ est bornée sur } [0,+\infty[}$.

b) Soit $t > 0$. On sait que d'après la question **Q 14** que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. D'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}F'(x)\,\mathrm{d}x$ converge donc (et est égale à $-\mathscr{L}(f)(t)$). Puisque d'autre part le crochet $[e^{-tx}F(x)]_{x=0}^{x\to+\infty}$ converge (puisque les fonctions F et $x \mapsto e^{-tx}$ tendent vers 0 en $+\infty$) et est égal à $-F(0) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ et que les fonctions F et $x \mapsto e^{-tx}$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit par intégration par parties que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-tx}F(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que

$$-\int_0^{+\infty} e^{-tx}f(x)\,\mathrm{d}x = [e^{-tx}F(x)]_{x=0}^{x\to+\infty} + \int_0^{+\infty} te^{-tx}F(x)\,\mathrm{d}x, \quad \textit{i.e.} \quad \mathscr{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f - t\int_0^{+\infty} e^{-tx}F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\alpha > 0$ (que l'on choisira ultérieurement). On a donc (*a priori* dans $[0,+\infty]$) :

$$\begin{aligned}\left|\mathscr{L}(f)(t) - \int_0^{+\infty} f\right| &\leqslant t\int_0^{+\infty} e^{-tx}|F(x)|\,\mathrm{d}x = t\int_0^{\alpha} e^{-tx}|F(x)|\,\mathrm{d}x + t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx}|F(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|F\|_\infty t\int_0^\alpha e^{-tx}\,\mathrm{d}x + \|F\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}t\int_\alpha^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|F\|_\infty(1-e^{\alpha t}) + \|F\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}t\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $(t,\alpha) \in]0,+\infty[^2$, $\left|\mathscr{L}(f)(t) - \displaystyle\int_0^{+\infty} f\right| \leqslant \|F\|_\infty(1-e^{\alpha t}) + \|F\|_{\infty,[\alpha,+\infty[}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, on dispose de $\alpha_0 > 0$ tel que $\|F\|_{\infty,[\alpha_0,+\infty[} \leqslant \varepsilon$. Remarquons d'autre part que $\displaystyle\lim_{t\to0}\|F\|_\infty(1-e^{\alpha_0 t}) = 0$ donc on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]0,\eta]$, $\|F\|_\infty(1-e^{\alpha_0 t}) \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $t \in]0,\eta]$, $\left|\mathscr{L}(f)(t) - \displaystyle\int_0^{+\infty} f\right| \leqslant 2\varepsilon$. Par définition de la limite, on en déduit que $\boxed{\displaystyle\lim_{t\to0^+}\mathscr{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f}$.

Q 16. On considère la fonction $f : x \geqslant 0 \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $f \in \mathscr{C}^0([0,+\infty[)$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on montre via un argument déjà rencontré plusieurs fois que f est bornée. Par ailleurs, puisque $\dfrac{\cos x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et que la fonction positive $x \geqslant 1 \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable, on sait que la fonction continue $x \geqslant 1 \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2}$ est intégrable donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Puisque les fonctions cos et inverse sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et que le crochet $[\cos(x)/x]_{x=1}^{x\to+\infty}$ converge, on en déduit par intégration par parties que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge. La continuité de f sur le segment $[0,1]$ donne donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$. On peut finalement appliquer la question **Q 15** qui assure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^+} \mathscr{L}(f)(t)$.

Or, d'après la question **4**, $\mathscr{L}(f)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t>0$,

$$\mathscr{L}(f)'(t) = -\int_0^{+\infty} x e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $t>0$, la fonction $x \geqslant 0 \mapsto e^{ix}e^{-tx} = e^{(-t+i)x}$ est intégrable et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix}e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(-t+i)x}}{-t+i}\right]_{x=0}^{x\to+\infty} = \frac{1}{t-i}$. On en déduit que pour tout $t>0$,

$$\mathscr{L}(f)'(t) = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{t-i}\right) = -\frac{1}{t^2+1}.$$

On dispose donc d'une constante $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t>0$, $\mathscr{L}(f)(t) = K - \arctan t$. En particulier $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathscr{L}(f)(t) = K - \frac{\pi}{2}$. Or, pour tout $x>0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-tx} f(x) = 0$ et pour tout $(x,t) \in\,]0,+\infty[\, \times [1,+\infty[$, $|e^{-tx}f(x)| \leqslant \|f\|_\infty e^{-x}$. Comme la fonction $x>0 \mapsto \|f\|_\infty e^{-x}$ est intégrable, le théorème de convergence dominée version continue assure que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathscr{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$. L'unicité de la limite assure finalement que $K = \frac{\pi}{2}$ puis que pour tout $t>0$, $\mathscr{L}(f)(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$. En particulier $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \mathscr{L}(f)(t) = \frac{\pi}{2}$.

On peut conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$.