Problème 1 - librement inspiré de Centrale PC 1998 - math 1

Dans ce problème, on note $I =]0,+\infty[$, $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs complexes.

Si $f \in \mathscr{C}$ et $s > 0$, on pose $f_s : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)}{t+s} \end{array}$.

Enfin, on pose $\mathscr{L} = \{f \in \mathscr{C} \ / \ f \text{ intégrable sur } I\}$ et $\mathscr{E} = \{f \in \mathscr{C} \ / \ \forall s > 0 \quad f_s \in \mathscr{L}\}$.

I. Étude de $\mathscr{E}$

Q 1. Montrez que $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.

Q 2. Montrez que $f \in \mathscr{E}$ si et s.si f est intégrable sur $]0,1]$ et $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Q 3. Montrez que si $f \in \mathscr{E}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $s > 0$, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(t+s)^n}$ est intégrable sur I.

Q 4. Justifiez que $\mathscr{L}$ est strictement inclus dans $\mathscr{E}$.

$$\text{Quand } f \in \mathscr{E}, \text{ on pose } \widehat{f} : s \mapsto \int_0^{+\infty} f_s(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q 5. Quelques exemples.

a) Dans cette sous-question, on pose $f : t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$. Justifiez que $f \in \mathscr{E}$ et calculez explicitement $\widehat{f}(s)$ en fonction de s.

b) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $g_\alpha : t \mapsto t^{\alpha-1}$. Montrez que $g_\alpha \in \mathscr{E}$ si et s.si $\alpha \in]0,1[$ et dans ce cas, montrez que $\widehat{g_\alpha}$ est colinéaire à g_α, le coefficient de colinéarité étant une intégrale que vous ne chercherez pas à calculer, qui est notée $J(\alpha)$.

II. Propriétés de $\widehat{f}$

Q 6. Soit $f \in \mathscr{E}$, $r > 0$ fixé.

a) Montrez que pour tout $s > 0$, $\left|\widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)\right| \leqslant \dfrac{|s-r|}{s} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{|f(t)|}{t+r}\,\mathrm{d}t$.

b) Déduisez-en que $\widehat{f}$ est continue en r.

Comme r est quelconque, ceci prouve donc que $\widehat{f}$ est continue sur I.

Q 7. Soit $f \in \mathscr{E}$. En vous inspirant de la question précédente, montrez que $\widehat{f}$ est dérivable sur I et que pour tout $r > 0$,

$$\widehat{f}\,'(r) = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2}\,\mathrm{d}t$$

Q 8. Il vient d'être montré que si $f \in \mathscr{E}$, alors $\widehat{f}$ est dérivable sur I. En réitérant, on peut montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^∞ sur I (il n'est pas demandé de le faire). Conjecturez une expression de $\widehat{f}^{\,(n)}(r)$ à l'aide d'une intégrale.

Q 9. Soit $f \in \mathscr{E}$. Montrez que $\lim\limits_{s \to +\infty} \widehat{f}(s) = 0$.

Q 10. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathscr{L}$ et $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} f \neq 0$. Montrez que $\widehat{f}(s) \underset{s \to +\infty}{\sim} \dfrac{A}{s}$.

Q 11. Dans cette question, f est la fonction $t \mapsto e^{-t}$. On note $g = \widehat{f}$ pour alléger les notations.

a) Montrez que g est solution d'une équation différentielle très simple.

b) Montrez que $\displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{s \to +\infty}{\sim} \frac{e^{-s}}{s}$.

c) Montrez que $g(s) \underset{s \to 0}{\sim} -\ln s$.

d) Donnez l'allure de la courbe de g.

III. Calcul de $J(\alpha)$ dans un cas particulier

Soit $\alpha \in]0,1[$. Le symbole $J(\alpha)$ désigne l'intégrale calculée en question **5b** de la partie **I**.

Q 12. En posant $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, montrez que $J(\alpha) = \beta \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x$.

On peut montrer que $J(\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. Dans cette partie, on étudie seulement un cas particulier (le cas général est trop long à traiter).

On suppose désormais que $\beta = 2n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et pour alléger les notations, on note simplement J au lieu de $J\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

Q 13. Montrez que $J = 2n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$ (indication : changement de variable), puis que $J = n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$, enfin que $J = \dfrac{n}{2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.

n étant fixé, pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, on pose $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ et $\omega_k = e^{i\theta_k}$.

Q 14.

a) Soit P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$ et a une racine simple de Q. Dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$, la partie polaire associée à a est de la forme $\dfrac{\lambda}{X-a}$.

Donnez une expression de λ en fonction de P, Q' et a.

b) Montrez que la fraction $F = \dfrac{1+X^{2n-2}}{1+X^{2n}}$ se décompose en éléments simples comme suit :

$$F = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{i \sin\theta_k}{X - \omega_k}$$

Q 15. Montrez que

$$F = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2\theta_k}{X^2 - 2X\cos\theta_k + 1}$$

Q 16. Montrez alors que $J = \pi \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\theta_k$, puis que $J = \dfrac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Problème 2 - Composé de projecteur et d'automorphisme

E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \geqslant 1$ quelconque et f est un endomorphisme de E.

Q 1. On suppose qu'il existe $(g,h) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que g est un automorphisme de E, h est un projecteur et $f = g \circ h$.

Montrez que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} h$ et que pour tout $x \in \operatorname{Im} h$, $f(x) = g(x)$.

Q 2. On veut maintenant montrer l'existence d'un automorphisme g et d'un projecteur h tels que $f = g \circ h$. On note $r = \operatorname{rg} f$.

a) Montrez qu'il existe une base de E notée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

b) Montrez l'existence de g et h.

Q 3. On sait d'après la question 2 qu'il existe $(g,h) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que g est un automorphisme de E, h est un projecteur et $f = g \circ h$.

On aimerait avoir en plus la propriété $f = g \circ h = h \circ g$.

Est-ce possible dans tous les cas ou existe-t-il une condition nécessaire et suffisante sur f pour que ce soit réalisable ? Justifiez, bien entendu.

Dans le cas où c'est possible, y-a-t-il unicité de h ? de g ?

Problème 1

I.

Q 1. Une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est intégrable.

On en déduit que $\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathrm{C}^0(I, C)}$

Avec $f(x) = \exp(-x)$, f_s est continue sur $[0, +\infty[$ et $f_s(u) = o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ quand $u \to +\infty$.

On en déduit que f est dans $\mathscr{E}$ donc $\boxed{\mathscr{E} \neq \{0\}}$.

Q 2. $f \in \mathscr{E}$ si et s.si les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|}{t+s}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+s}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Comme on étudie des fonctions à valeurs positives, on peut appliquer les th. de comparaison.

D'abord, $\dfrac{|f(t)|}{t+s} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{|f(t)|}{s}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|}{t+s}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|}{s}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, *i.e.* f est intégrable sur $]0, 1]$.

Et de même, $\dfrac{|f(t)|}{t+s} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{|f(t)|}{t}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+s}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, *i.e.* $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $\boxed{f \in \mathscr{E} \text{ si et s.si } f \text{ est intégrable sur }]0,1] \text{ et } t \mapsto \dfrac{f(t)}{t} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[.}$

Q 3. Soit $f \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 0$. Alors f est intégrable sur $]0, 1]$ et $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or $\dfrac{|f(t)|}{(t+s)^n} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{|f(t)|}{s^n}$ donc par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(t+s)^n}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

De même, pour tout $t \geqslant 1$ et $s > 0$, $(t+s)^n \geqslant t^n \geqslant t$ donc $\dfrac{|f(t)|}{(t+s)^n} \leqslant \dfrac{|f(t)|}{t}$ donc par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto \dfrac{f(t)}{(t+s)^n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $\boxed{t \mapsto \dfrac{f(t)}{(t+s)^n} \text{ est intégrable sur } I.}$

Q 4. Soit $f \in \mathscr{L}$. f_s est continue sur I et $|f_s(u)| \leqslant \dfrac{1}{s}|f(u)|$ donc f_s est intégrable sur I. Et donc $\boxed{\mathscr{L} \subset \mathscr{E}.}$

En considérant $f : u \mapsto \dfrac{1}{u+1}$, f n'est pas dans $\mathscr{L}$ mais est dans $\mathscr{E}$, puisque f_s est continue sur $[0, +\infty[$ et $|f_s(u)| \leqslant \dfrac{1}{u^2}$ pour $u \geqslant 1$. Donc $\boxed{\mathscr{L} \text{ est strictement inclus dans } \mathscr{E}.}$

Q 5.

a) Si $s \neq 1$, on décompose la fraction $\dfrac{1}{(t+1)(t+s)}$ en élements simples : $\dfrac{1}{(t+1)(t+s)} = \dfrac{1}{s-1}\left(\dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t+s}\right)$.

Donc $\displaystyle\widehat{f}(s) = \frac{1}{s-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+s}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{s-1}\left[\ln(t+1) - \ln(t+s)\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{s-1}\left[\ln\frac{t+1}{t+s}\right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{\ln s}{s-1}$.

Si $s = 1$, alors $\displaystyle\widehat{f}(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{t+1}\right]_{t=0}^{+\infty} = 1$.

b) Avec $f = g_\alpha : t \mapsto t^{\alpha-1}$, f_s est continue sur I et $f_s(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{s}\dfrac{1}{t^{1-\alpha}}$ et $f_s(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2-\alpha}}$.

On en déduit que f_s est intégrable sur I si et seulement si $1 - \alpha < 1$ et $2 - \alpha > 1$, soit $\alpha \in]0, 1[$.

Conclusion : $\boxed{g_\alpha \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \alpha \in]0, 1[}$

Alors en utilisant le changement de variable $t = s \times u$,

$$\widehat{g_\alpha}(s) = \int_I \frac{t^{\alpha-1}}{t+s}\,\mathrm{d}t = s^{\alpha-1}\int_I \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u = \widehat{g_\alpha}(1) \times g_\alpha(s)$$

II.

Q 6.

a) Pour tout $s > 0$,

$$\left|\widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{f(t)}{t+s} - \frac{f(t)}{t+r}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} |f(t)| \times \left|\frac{r-s}{(t+s)(t+r)}\right| \mathrm{d}t = |r-s| \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(t+s)(t+r)} \mathrm{d}t$$

et $(t+s)(t+r) \geqslant s(t+r)$, donc $\left|\widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)\right| \leqslant |r-s| \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{s(t+r)} \mathrm{d}t = \frac{|s-r|}{s} \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+r} \mathrm{d}t$.

b) Quand s tend vers $r > 0$, le quotient $\dfrac{|s-r|}{s}$ tend vers 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+r} \mathrm{d}t$ ne dépend pas de s, donc le produit $\dfrac{|s-r|}{s} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{t+r} \mathrm{d}t$ tend vers 0, donc par encadrement, $\widehat{f}(s)$ tend vers $\widehat{f}(r)$, ce qui signifie que $\boxed{\widehat{f} \text{ est continue en } r}$

Q 7. Pour $s \neq r$, le taux d'accroissement $\dfrac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)}{s-r}$ vaut donc $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} \mathrm{d}t + (s-r) \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2(t+s)} \mathrm{d}t$.

Or de la même façon, $\left|(s-r) \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2(t+s)} \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|s-r|}{s} \int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|}{(t+r)^2} \mathrm{d}t$

et donc $\displaystyle\lim_{s\to r} (s-r) \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2(t+s)} \mathrm{d}t = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{s\to r} \frac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(r)}{s-r} = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} \mathrm{d}t$, ce qui signifie que $\widehat{f}$ est dérivable en r et $\widehat{f}\,'(r) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} \mathrm{d}t$.

Ceci étant vrai pour tout r, on a donc montré que

$$\boxed{\widehat{f} \text{ est dérivable sur } I \text{ et pour tout } r > 0,\ \widehat{f}\,'(r) = -\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^2} \mathrm{d}t}$$

Q 8. $\boxed{\widehat{f}^{\,(n)}(r) = (-1)^n n! \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{(t+r)^{n+1}} \mathrm{d}t}$

Q 9. Comme on va faire tendre s vers $+\infty$, on peut supposer que $s \geqslant 1$.

— Pour tout $t \in I$, $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{f(t)}{t+s} = 0$.

— Pour tout $s \geqslant 1$ et $t \in I$, $\left|\dfrac{f(t)}{t+s}\right| \leqslant \left|\dfrac{f(t)}{t+1}\right| = |f_1(t)|$ et f_1 est intégrable sur I (hypothèse de domination)

Donc d'après le th. de convergence dominée, $\boxed{\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \widehat{f}(s) = 0.}$

Q 10. On veut montrer que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} s\widehat{f}(s) = A$.

$s\widehat{f}(s) - A = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \left(\frac{s}{t+s} - 1\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{-tf(t)}{s+t} \mathrm{d}t$, donc en procédant de même, comme $\left|\dfrac{-t}{s+t}\right| \leqslant 1$, on obtient :

— Pour tout $t \in I$, $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \frac{-tf(t)}{t+s} = 0$.

— Pour tout $s \geqslant 1$ et $t \in I$, $\left|\dfrac{-tf(t)}{t+s}\right| \leqslant |f(t)|$ et f est intégrable sur I (hypothèse de domination)

Donc d'après le th. de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} s\widehat{f}(s) = A$, *i.e.* $\boxed{\widehat{f}(s) \underset{s\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{s}}$.

Q 11.

a) Pour tout $s > 0$, $g'(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-t}}{(t+s)^2} \mathrm{d}t$ d'après la question 7. On effectue une intégration par parties, on obtient alors $g'(s) = \left[\dfrac{e^{-t}}{t+s}\right]_{t=0}^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+s} \mathrm{d}t$ (tout ceci a un sens car les deux intégrales convergent).

Il vient donc $\boxed{\text{pour tout } s > 0,\ g'(s) - g(s) = -\dfrac{1}{s}.}$

b) L'équation différentielle $y' - y = \dfrac{-1}{s}$ a pour solutions les fonctions $s \mapsto \lambda e^s + e^s \displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ (obtenu par la méthode de variation de la constante). Comme g est une solution, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $s > 0$, $g(s) = \lambda e^s + e^s \displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Or g a pour limite 0 en $+\infty$ d'après la question 9, donc $\lambda = 0$. Donc pour tout $s > 0$, $g(s) = e^s \displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur I et que $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$, d'après la question 10, on en déduit que $e^s \displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{1}{s}$ donc $\boxed{\displaystyle\int_s^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{s\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-s}}{s}.}$

c) Quand $t \to 0$, $\dfrac{e^{-t}}{t} \sim \dfrac{1}{t}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge donc comme ce sont des fonctions positives, d'après un résultat du cours, on en déduit que $\displaystyle\int_s^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{s\to0}{\sim} \int_s^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln s$.

Comme $-\ln s$ tend vers $+\infty$ et $g(s) = \displaystyle\int_s^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (on ajoute une constante), on a encore $\boxed{g(s) \underset{s\to0}{\sim} -\ln s.}$

d) La courbe de g est similaire à celle de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

III.

Q 12. $J(\alpha) = \displaystyle\int_I \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,\mathrm{d}u$: on effectue le changement de variables $u = t^\beta$.

Q 13. Avec le changement de variables $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$, on a $J = 2n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n-2}}{1+u^{2n}}\,\mathrm{d}u$.

Donc $2J = 2n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$, donc $J = n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.

Comme les exposants sont pairs, la fonction $t \mapsto \dfrac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$ est paire, donc son intégrale sur $]-\infty, 0]$ et celle sur $[0, +\infty[$ sont les mêmes, donc $J = \dfrac{n}{2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}\,\mathrm{d}t$.

Q 14.

a) C'est du cours de MP2I : $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}.}$

b) Les racines (simples) du polynôme $1 + X^{2n}$ sont les racines $2n$-èmes de -1, c'est-à-dire les ω_k pour $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. Donc la partie polaire associée à chaque racine est de la forme $\dfrac{\lambda_k}{X - \omega_k}$ où $\lambda_k = \dfrac{1+\omega_k^{2n-2}}{2n\omega_k^{2n-1}}$.

Or $\omega_k^{2n} = -1$, donc $\lambda_k = \dfrac{1 - \frac{1}{\omega_k^2}}{-2n\frac{1}{\omega_k}} = \dfrac{-1}{2n}\left(\omega_k - \dfrac{1}{\omega_k}\right) = \dfrac{-1}{2n}\left(\omega_k - \overline{\omega_k}\right) = \dfrac{-1}{2n} 2i \sin\theta_k$.

Donc $\boxed{F = \dfrac{-1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{i \sin\theta_k}{X - \omega_k}.}$

Q 15. $F = \dfrac{-1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{i \sin\theta_k}{X - \omega_k} = \frac{-1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{i\sin\theta_k}{X-\omega_k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{i \sin\theta_k}{X - \omega_k} \right)$.

Or pour $k \in [\![n, 2n-1]\!]$, $\omega_k = \overline{\omega_{2n-1-k}}$ et $\sin\theta_k = -\sin\theta_{2n-1-k}$ donc en posant $\ell = 2n-1-k$ dans la deuxième somme, on obtient

$$F = \frac{-1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{i\sin\theta_k}{X-\omega_k} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{-i\sin\theta_\ell}{X - \overline{\omega_\ell}} \right) = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{i\sin\theta_k}{X-\omega_k} + \frac{-i\sin\theta_k}{X-\overline{\omega_k}} \right) = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{i\sin\theta_k(\omega_k - \overline{\omega_k})}{X^2 - 2X\cos\theta_k + 1}$$

donc $F = \dfrac{-1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{i\sin\theta_k(2i\sin\theta_k)}{X^2 - 2X\cos\theta_k + 1}$ $\boxed{= \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2\theta_k}{X^2 - 2X\cos\theta_k + 1}.}$

Q 16. Alors $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2\theta_k}{x^2 - 2x\cos\theta_k + 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{x-\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

donc $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[\sin\theta_k \arctan\left(\frac{x-\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\right)\right]_{x=-\infty}^{+\infty} = \sum_{k=0}^{n-1} \pi\sin\theta_k = \pi\sum_{k=0}^{n-1}\sin\theta_k.$

Pour conclure, il reste à calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\theta_k \sin\frac{\pi}{2n}$: grâce à la formule de trigonométrie $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, on obtient une somme télescopique.

$$J \times \sin\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{(k+1)\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{2} \times (\cos 0 - \cos\pi) = \pi, \text{ d'où } \boxed{J = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}.$$

Problème 2

Q 1. Soit $x \in E$. Comme g est injective, on a l'équivalence $g(u) = 0 \iff u = 0$, donc en particulier $g(h(x)) = 0 \iff h(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \operatorname{Ker} f \iff x \in \operatorname{Ker} h$.

Ceci prouve donc que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} h$.

h est un projecteur, donc tous les vecteurs de $\operatorname{Im} h$ sont invariants par h : pour tout $x \in \operatorname{Im} h$, $h(x) = x$ donc $f(x) = g(h(x)) = g(x)$.

Q 2.

a) C'est du cours : on choisit une base de $\operatorname{Ker} f$, disons $(e_{r+1}, \dots, e_n)$, on la complète en une base de E, on obtient une base $(e_1, \dots, e_n)$.

La démonstration du th. du rang montre que la famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

b) On note h le projecteur sur $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_r)$ parallèlement à $\operatorname{vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$.

On complète la famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ en une base de E : $(f(e_1), \dots, f(e_r), u_{r+1}, \dots, u_n)$.

Puis on définit un endomorphisme g de E en donnant l'image de la base $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$: on sait d'après le cours que c'est suffisant. Pour cela, on pose $g(e_i) = f(e_i)$ si $i \leqslant r$ et $g(e_i) = u_i$ si $i \geqslant r+1$.

L'endomorphisme g ainsi défini est un automorphisme
car il transforme la base $(e_1, \dots, e_n)$ en la base $(f(e_1), \dots, f(e_r), u_{r+1}, \dots, u_n)$.

De plus, on constate que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
— si $i \geqslant r+1$: $f(e_i) = 0$ car $e_i \in \operatorname{Ker} f$ et $g(h(e_i)) = g(0) = 0$ car $e_i \in \operatorname{Ker} h$, donc $g \circ h(e_i) = 0 = f(e_i)$
— si $i \leqslant r$: $f(e_i) = g(e_i) = g(h(e_i))$ car $e_i \in \operatorname{Im} h$ donc $h(e_i) = e_i$.

Finalement, les deux endomorphismes f et $g \circ h$ coïncident sur une base de E, donc ils sont égaux.

Q 3. Si $f = g \circ h = h \circ g$ et g automorphisme, h projecteur, alors les questions précédentes montrent que grâce à l'égalité $f = g \circ h$, on a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} h$. Mais avec l'égalité $f = h \circ g$, on a $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} h$.

En effet, si $y \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ donc $y = h(g(x))$ donc $y \in \operatorname{Im} h$. Et réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} h$, alors $h(y) = y$ puis en posant $x = g^{-1}(y)$, on obtient $y = h(g(x)) = f(x)$ donc $y \in \operatorname{Im} f$.

Comme l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires, on en déduit la condition nécessaire $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, alors dans la preuve de la question 2b,
— pour compléter la famille $(e_{r+1}, \dots, e_n)$, base de $\operatorname{Ker} f$, on peut choisir des vecteurs de $\operatorname{Im} f$, car $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$: on fait ce choix, désormais $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de $\operatorname{Im} f$
— pour compléter la famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$, base de $\operatorname{Im} f$, on peut choisir les vecteurs $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ pour la même raison : on fait ce choix aussi,

alors on a déjà grâce à la question 2b l'égalité $f = g \circ h$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} h$. Mais on a en plus $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} h = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_r)$.
Puis on vérifie que $f = h \circ g$ de la même façon : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
— si $i \geqslant r+1$: $f(e_i) = 0$ car $e_i \in \operatorname{Ker} f$ et $g(e_i) = e_i$ donc $h(g(e_i)) = h(e_i) = 0$ car $e_i \in \operatorname{Ker} h$, donc $h \circ g(e_i) = 0 = f(e_i)$
— si $i \leqslant r$: $f(e_i) = g(e_i)$ donc $g(e_i) \in \operatorname{Im} f$, or $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} h$, donc $h(g(e_i)) = g(e_i)$, donc $h \circ g(e_i) = g(e_i) = f(e_i)$

Finalement, les deux endomorphismes f et $h \circ g$ coïncident sur une base de E, donc ils sont égaux. On a donc au total $f = g \circ h = h \circ g$. La condition $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ est donc suffisante.

Au total, elle est nécessaire et suffisante.

Au passage, on a prouvé que h est alors unique : on a nécessairement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} h$ donc le projecteur h est entièrement déterminé par cette donnée (*i.e.* on sait comment calculer $h(x)$ pour tout $x \in E$, par définition de h).

Pour g, ce n'est pas le cas : on a juste besoin d'envoyer les vecteurs $e_{r+1}, \ldots, e_n$ par g dans le noyau de f, il y a donc d'autres façons de procéder que celle proposée (par exemple $g(e_i) = e_{n+r+1-i}$).