Intégrales généralisées

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les fonctions considérées dans ce chapitre sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose connue la notion d'intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes (*cf* cours de Première Année).

Si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ (ou $[b,a]$), on note $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (ou toute autre lettre à la place de t) l'intégrale de f entre a et b : quand on n'a pas besoin de nommer la variable d'intégration, on ne la note pas, mais si on la note alors on n'oublie pas l'élément différentiel d.
En préambule, on généralise la notion de fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition. Soit I un intervalle quelconque.
On dit qu'une fonction est continue par morceaux sur I quand elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Exemples.

— La fonction $t \mapsto \begin{cases} -\ln t & \text{si } t \in]0,1] \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \in \,]1,+\infty[\end{cases}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

— La fonction $t \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

Dans toute la suite, on note $C_m^0(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I (et à valeurs dans $\mathbb{K}$).

Proposition 1. *L'ensemble $C_m^0(I,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

1 Intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$

Dans cette section, a est un réel.

1.1 Définition et exemples fondamentaux

Définition. Soit $f \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge (ou qu'elle est convergente ou simplement qu'elle existe) quand $\int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Dans ce cas, on pose $\int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Remarque. Une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f$ est une limite et une limite n'existe pas toujours. Donc avant d'utiliser une telle intégrale dans un raisonnement ou un calcul, on doit toujours justifier son existence !

Exemples.

— Soit α un réel. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $\alpha > 0$.

— Soit α un réel. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $\alpha > 1$ (intégrale dite de Riemann).

Ces résultats sont à connaître.

Exercices :

1) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$? Donner sa valeur en cas de convergence.

   Faire de même avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ où $a>0$, puis avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$? Donner sa valeur en cas de convergence.

3) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$?

1.2 Propriétés

La convergence de l'intégrale ne dépend pas de la borne a, ce qui généralise la relation de Chasles.

Proposition 2. *Soit $f \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{K})$ et $b \in [a,+\infty[$.*

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et s.si $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ converge. Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f$.

Dans le cas convergent, on retrouve la linéarité.

Proposition 3. *Soit $(f,g) \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{K})^2$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.*

Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ est convergente et dans ce cas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g$.

Remarque.
- « La somme d'une intégrale convergente et d'une divergente est divergente ».
- Il n'y a rien à dire *a priori* sur la « somme de deux intégrales divergentes ».

1.3 Cas des fonctions réelles positives

Proposition 4. *Soit $f \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{R})$.*

Si $f \geqslant 0$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \geqslant 0$.

Si de plus, f est continue et prend au moins une valeur strictement positive, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f > 0$. Ceci est vrai en particulier quand f est continue et strictement positive sur $[a,+\infty[$.

On en déduit la propriété de croissance des intégrales.

Proposition 5. *Soit $(f,g) \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{R})^2$.*

Si $f \leqslant g$ et si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f \leqslant \int_a^{+\infty} g$.

1.4 Théorème de comparaison entre fonctions positives

D'abord une condition nécessaire et suffisante de convergence dans le cas d'une fonction positive.

Proposition 6. *Soit $f \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{R})$.*

Si $f \geqslant 0$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si et s.si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée.

On en déduit un th. de comparaison du même type que celui sur les séries.

Théorème 1. *Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ et positives.*

- ▷ *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.*
- ▷ *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.*
- ▷ *Si $f \underset{+\infty}{\sim} g$ et $g \geqslant 0$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature : l'une converge si et seulement si l'autre converge.*

Remarque.

— Dans le cas où f est positive et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Par convention, on pose alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = +\infty$.

Attention ! Dans le cas où f n'est pas de signe constant, le fait que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge n'assure pas que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe !

— Dans ce théorème, il suffit que les inégalités soient vraies au voisinage de $+\infty$ seulement.

— Si les fonctions sont à valeurs négatives, on se ramène à ce théorème en travaillant avec les fonctions opposées. Ce qui compte donc est qu'elles soient de signe constant.

— Avec des fonctions dont le signe n'est pas constant, alors ce théorème est faux. Il faut donc bien s'assurer et mettre en valeur que les fonctions sont positives (ou négatives).

— On compare les fonctions, pas les intégrales ! N'écrivez pas des symboles $\displaystyle\int_a^{\cdots}$ partout.

***Exercices* :**

4) Montrez que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

5) Montrez que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ diverge.

6) Montrez que pour tout $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

1.5 Lien avec les séries

D'abord, le théorème de comparaison série-intégrale. Au delà du résultat lui-même, l'idée d'encadrement est essentielle et sera abondamment utilisée par la suite.

Proposition 7. *Soit f une fonction continue (par morceaux), positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*
Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ sont de même nature.

Dans le même genre, on peut étudier la convergence d'une intégrale d'une fonction positive par l'intermédiaire d'une série.

Proposition 8. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et* ***positive****. Soit u une suite positive et strictement croissante qui diverge vers $+\infty$.*
Alors il y a équivalence entre

— *l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge*

— *la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_{u_n}^{u_{n+1}} f$ converge*

Exercices **:**

7) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
8) En utilisant l'inégalité $\sin t \geqslant \dfrac{2}{\pi}t$ valable pour tout $t \in [0, \pi/2]$, montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x|\sin x|}\,\mathrm{d}x$ converge.

2 Intégrales généralisées sur d'autres types d'intervalles

2.1 Intégrales généralisées sur $]a, b]$

Dans cette partie, a est un réel ou $-\infty$, b un réel, de sorte que $a < b$.

Définition. Soit $f \in C_m^0(]a, b], \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge quand $\displaystyle\int_x^b f$ a une limite finie quand x tend vers a_+.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x \to a_+} \int_x^b f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Tous les résultats énoncés précédemment restent valables, sauf ceux sur les intégrales de Riemann (voir ci-dessous).

Exemples.

— $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

— Soit α un réel. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $\alpha < 1$ (intégrale dite de Riemann).

Ces deux résultats sont à connaître.

Exercices **:**

9) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ diverge. À quelle condition sur α l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

2.2 Intégrales généralisées sur $[a, b[$

Dans cette partie, a est un réel, b un réel ou $+\infty$, de sorte que $a < b$.

Définition. Soit $f \in C_m^0([a, b[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge quand $\displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie quand x tend vers b_-.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x \to b_-} \int_a^x f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge (ou qu'elle est divergente).

Tous les résultats énoncés précédemment restent valables, sauf ceux sur les intégrales de Riemann (voir ci-dessous).

On peut remarquer que par changement de variable $x \mapsto -x$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature (et dans le cas convergent, a la même valeur) que $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(-u)\,\mathrm{d}u$. Donc les résultats valables en un point réel ne dépendent pas du côté du point où on se place.

Exemples.

— Si a est un réel, alors $\displaystyle\int_a^{a+1} \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $\alpha < 1$.

— Si a est un réel, alors $\displaystyle\int_{a-1}^{a} \frac{1}{(a-t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et s.si $\alpha < 1$.

— $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\,\mathrm{d}t$ converge.

***Exercices* :**

10) Montrez que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{1/2} |\ln x|^\alpha\,\mathrm{d}x$ converge.

2.3 Intégrales généralisées sur $]a, b[$

Dans cette partie, a et b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$.

Définition. Soit $f \in C^0_m(]a,b[, \mathbb{K})$.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge quand il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent.

Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{x\to a_+} \int_x^c f + \lim_{y \to b_-} \int_c^y f$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ diverge.

Remarque. Grâce à la relation de Chasles, on constate que la valeur de c n'est finalement pas importante : si ça marche avec pour un certain réel $c \in]a,b[$, alors ça marche pour toute autre valeur prise dans $]a,b[$.

Tous les résultats à propos de la linéarité et les inégalités énoncés précédemment restent valables.

***Exercices* :**

11) Montrez que l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

12) Même chose avec l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t$.

13) Même chose avec l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

14) Montrez que pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.

15) Pour quelles valeurs de α et β l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln x|^\alpha}{|1-x|^\beta}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

2.4 Propriétés communes à toutes ces intégrales

Toutes les propriétés vues dans la section 1 sont préservées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. En voici trois autres.

a) Changement de variables

Proposition 9. *Soit a, b, α, β des réels ou des infinis tels que $a < b$ et $\alpha < \beta$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$.*
Si φ est une bijection de classe C^1 et strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ dans $]a,b[$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(u)\ \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et si elles sont convergentes, alors elles sont égales.

Remarque. On a évidemment un résultat analogue avec un changement de variable strictement décroissant et des bornes inversées.
Comme une bijection de classe C^1 entre deux intervalles est forcément strictement monotone, l'hypothèse de stricte monotonie est redondante, mais comme elle est explicitement dans le programme de MPI, il vaut mieux la préciser (de toute façon, elle sera évidente dans les cas pratiques et ne nécessitera pas de longues preuves).

Exercices :

16) Montrez que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'on a l'égalité $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.
17) Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0. Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$ où $a > 0$.

b) Intégration par parties

Soit f une fonction définie sur $]a, b[$.

Dans le cas où les limites de f en a_+ et en b_- existent et sont finies, on note $[f]_a^b = \lim\limits_{b_-} f - \lim\limits_{a_+} f$.

Proposition 10. *Soit a, b des réels ou des infinis tels que $a < b$. Soit f, g deux fonctions de classe C^1 sur $]a, b[$.*
Alors si parmi les trois quantités suivantes

$$\int_a^b f'g \quad ; \quad \int_a^b fg' \quad ; \quad [fg]_a^b$$

deux existent, alors la troisième existe aussi et dans ce cas on a l'égalité habituelle $\displaystyle\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

En pratique, deux stratégies sont possibles :
- — revenir à une vraie intégration par parties sur un segment $[x, y] \subset]a, b[$, s'assurer qu'on peut faire tendre x vers a et y vers b puis le faire effectivement pour obtenir la relation entre les intégrales ;
- — effectuer l'intégration par parties **sous réserve de convergence**, puis justifier la convergence d'au moins deux des trois morceaux, ce qui rend l'intégration par parties licite.

Dans quelques cas où la seconde statégie n'est pas acceptable (deux des trois morceaux divergent), il est nanmoins possible que la première donne quand même un résultat.

Exercices :

18) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Montrez que les intégrales u_n convergent, donnez une relation de récurrence simple entre u_n et u_{n+1}, puis donnez la valeur de u_n en fonction de n.
19) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, puis déduisez-en que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2.5 Primitives

Proposition 11. *Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ et $c \in]a, b[$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ converge.*

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f sur $]a, b[$ qui a pour limite 0 en a_+.

Proposition 12. *Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ et $c \in]a, b[$ tels que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f$ converge.*

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f$ est l'opposé de l'unique primitive de f sur $]a, b[$ qui a pour limite 0 en b_-.

Exemples.
- — La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ln t\,\mathrm{d}t$ est la primitive de ln qui a pour limite 0 en 0.
- — La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]0, +\infty[$, de classe C^1 sur cet intervalle et sa dérivée est la fonction $x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{x^2}$.

3 Résumé pour étudier la convergence d'une intégrale

On veut savoir si une intégrale $\int_a^b f$ existe où a, b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$.

D'abord on détermine le plus grand sous-ensemble de $[a, b]$ sur lequel f est continue par morceaux :

— si c'est $[a, b]$, alors il n'y a aucun problème d'existence de l'intégrale : c'est une bête intégrale classique ;

— si c'est $]a, b]$ (qui ne peut arriver que si b est réel) ou $[a, b[$ (donc a réel), alors il faut étudier le comportement de f au voisinage du point ouvert ;

— si c'est $]a, b[$, alors on choisit arbitrairement un point $c \in]a, b[$ et on se ramène deux fois au cas précédent.

Un petit résultat qui supprime parfois le problème en un point ouvert **réel** : pensez à étudier la limite de la fonction, si elle est réelle, alors c'est réglé. On dit qu'on a une fausse singularité en ce point **réel**.

Proposition 13. *Soit a, b deux réels tel que $a < b$ et $f \in C^0_m(]a, b], \mathbb{K})$.*
Si f a une limite réelle en a par valeurs supérieures, alors on peut prolonger f par continuité en a, le prolongement $\overline{f}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et l'intégrale $\int_a^b f$ converge et vaut $\int_a^b \overline{f}$.

***Exercices* :**

20) Justifiez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

21) Montrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ converge.

4 Fonctions intégrables sur un intervalle

Dans cette section, a, b sont des réels ou des infinis tels que $a < b$. On note $I =]a, b[$.

4.1 Intégrales absolument convergentes

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur I.
On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument (ou est absolument convergente) quand l'intégrale $\int_a^b |f|$ converge.

Le théorème suivant est primordial pour la suite du cours de l'année.

Théorème 2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur I.*
Si l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument, alors l'intégrale $\int_a^b f$ converge.
Dans ce cas, $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f|$.

***Exercices* :**

22) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

23) Montrez que si m est un complexe de partie réelle strictement positive, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-mt}\,\mathrm{d}t$ converge et donnez sa valeur.
Déduisez-en l'existence et la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

24) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Remarque. La réciproque est fausse ! On a montré que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et qu'elle ne converge pas absolument.

4.2 Fonctions intégrables

Définition. Soit f une fonction continue par morceaux sur I.

On dit que f est intégrable sur I quand l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument. On note alors aussi

$$\int_I f = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f$$

L'ensemble des fonctions intégrables sur I est souvent noté $\mathscr{L}^1(I, \mathbb{K})$ (L comme Lebesgue, mathématicien français de la fin du 19ème et début du 20ème siècle). Par abus de notation, on écrit parfois « f est $\mathscr{L}^1$ » pour « f est intégrable sur I ».

Exemples. α désigne un réel quelconque, a un réel quelconque strictement positif.

— La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$.
  Plus généralement, $t \mapsto t^\alpha \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ (voire $[0, +\infty[$ si $\alpha > -1$).

— La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et s.si $\alpha > 1$.
  La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a]$ si et s.si $\alpha < 1$.

— La fonction ln est intégrable sur $]0, a]$.

Proposition 14. *$\mathscr{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 15 (stricte positivité de l'intégrale)**.**

Si f est continue, intégrable sur I et $\int_I |f| = 0$, alors $f = 0$.

Par contraposée, si f est continue, intégrable sur I et $f \neq 0$, alors $\int_I |f| > 0$.

4.3 Théorème de comparaison des fonctions intégrables

Rappel :

f et g étant deux fonctions définie au voisinage d'un point $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

— $f = O(g)$ au voisinage de p signifie : il existe $K > 0$ et V voisinage de p tel que pour tout $x \in V$, $|f(x)| \leqslant K|g(x)|$;

— $f = o(g)$ au voisinage de p signifie : il existe une fonction $\varepsilon > 0$ et V voisinage de p tel que pour tout $x \in V$, $|f(x)| \leqslant \varepsilon(x)|g(x)|$ et $\lim\limits_{x \to p} \varepsilon(x) = 0$.

Dans le cas où g ne s'annule pas (ce qui est en pratique toujours le cas),

— $f = O(g)$ au voisinage de p signifie que $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de p ;

— $f = o(g)$ au voisinage de p signifie que $\dfrac{f}{g}$ a pour limite 0 en p.

Théorème 3. *Soit f, g deux fonctions continues par morceaux sur I.*

- ▷ *si $|f| \leqslant |g|$ sur I et si g est intégrable, alors f l'est aussi.*
- ▷ *si $f = O(g)$ au voisinage des bornes ouvertes de I et g est intégrable, alors f l'est aussi. En particulier si $f = o(g)$.*
- ▷ *si $f \sim g$ au voisinage des bornes ouvertes de I, alors il y a équivalence entre l'intégrabilité de f et celle de g.*

Exercices :

25) Montrez que la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

26) La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\cos t + t^2}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

5 Intégration des relations de comparaisons

Les résultats présentés portent sur des fonctions intégrables sur $[a,+\infty[$. On obtient évidemment des résultats analogues sur les autres types d'intervalles.

5.1 Théorème de comparaison par domination

Dans le cas convergent d'abord, les « restes partiels » suivent la même relation de comparaison.

Théorème 4. *Soit f, g deux fonctions définies sur $[a,+\infty[$, g à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.*
Si $f=O(g)$ et g est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
De plus, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f = O\left(\int_x^{+\infty} g\right)$ quand $x\to+\infty$.
Si $f=o(g)$ et g est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors f est intégrable sur $[a,+\infty[$.
De plus, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f = o\left(\int_x^{+\infty} g\right)$ quand $x\to+\infty$.

Dans le cas divergent ensuite, les « intégrales partielles » suivent aussi la même relation de comparaison.

Théorème 5. *Soit f, g deux fonctions définies sur $[a,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.*
Si $f=O(g)$ et f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.
De plus, $\displaystyle\int_a^{x} f = O\left(\int_a^{x} g\right)$ quand $x\to+\infty$.
Si $f=o(g)$ et f n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$, alors g n'est pas intégrable sur $[a,+\infty[$.
De plus, $\displaystyle\int_a^{x} f = o\left(\int_a^{x} g\right)$ quand $x\to+\infty$.

5.2 Théorème de comparaison par équivalence

Théorème 6. *Soit f, g deux fonctions définies sur un intervalle $[a,+\infty[$.*
Si $f\sim g$, alors l'intégrabilité de l'une est équivalente à celle de l'autre.
De plus,

- ▷ *si les fonctions sont intégrables, alors les restes partiels sont équivalents : $\displaystyle\int_x^{+\infty} f \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g$;*
- ▷ *si les fonctions ne sont pas intégrables, alors les intégrales partielles divergent et sont équivalentes : $\displaystyle\int_a^{x} f \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^{x} g$.*

Exercices :

27) Justifiez que $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\sim} -\ln x$. Déduisez-en un équivalent de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ quand $x\to0$.
28) Montrez que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
29) Montrez que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$.
30) Montrez que $\displaystyle\int_1^{x} \frac{t-1}{t+1}\ln t\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln x$.
31) Montrez que $\displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to0}{\sim} 2\sqrt{x}$.