Problème 1 - Calculs d'intégrales

I. Intégrale de Gauss

L'intégrale de Gauss est l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle un résultat à propos des intégrales de Wallis : en notant $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n\,\mathrm{d}\theta$, on a $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Q 1. Justifiez que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q 2. Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, \sqrt{n}],\quad \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

Q 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{n}\sin\theta$, exprimez l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$ en fonction d'une intégrale de Wallis.

Q 4. Avec le changement de variables $t = \sqrt{n}\tan\theta$, établissez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}$.

Déduisez-en que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}$.

Q 5. Déterminez enfin la valeur de l'intégrale de Gauss.

II. Des intégrales avec des logarithmes

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q 6.

a) Justifiez l'existence de u_n et v_n, puis montrez que $u_n = \dfrac{-1}{(n+1)^2}$.

b) Montrez que $|v_n| \leqslant -u_n$, déduisez-en la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

Q 7.

a) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge, puis que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = v_0 + (-1)^n v_{n+1}$.

b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrez que $v_0 = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Q 8. Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et donnez sa valeur grâce à ce qui précède.

Problème 2 - Des inégalités entre intégrales

I.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Q 1. Montrez l'existence des intégrales suivantes et justifiez l'égalité $\displaystyle\int_0^1 f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{f(x)^2}{\sin^2(\pi x)}\,\mathrm{d}x$.

Q 2. Déduisez-en $\displaystyle\int_0^1 f'^2 - \pi^2\int_0^1 f^2 = \int_0^1 \Big(f'(x) - \pi f(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\Big)^2\,\mathrm{d}x$.

Q 3. Concluez : $\displaystyle\int_0^1 f'^2 \geqslant \pi^2 \int_0^1 f^2$. Dans quel cas y-a-t-il égalité ?

II.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ converge.

On pose $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

Q 4.

a) Montrez que g est prolongeable par continuité en 0.

b) Justifiez que g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et montrez que pour tout $x > 0$, $f'(x)^2 = xg'(x)^2 + g(x)g'(x) + \dfrac{1}{4x}g(x)^2$.

Q 5. Montrez que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg'(x)^2\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sont convergentes et que la fonction g^2 a une limite réelle en $+\infty$.

Q 6. Montrez que cette limite est nulle et déduisez-en l'inégalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant 4\int_0^{+\infty} f'(x)^2\,\mathrm{d}x$.

Q 7. Étudiez le cas d'égalité.

III.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2$ convergent.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si u, v sont deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\left(\int_a^b u.v\right)^2 \leqslant \int_a^b u^2 \times \int_a^b v^2$

Q 8.

a) Montrez que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f.f''$ est absolument convergente.

b) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, donnez une relation entre $\displaystyle\int_a^b f'^2$ et $\displaystyle\int_a^b f.f''$.

Q 9. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ diverge.

a) Montrez que $f(x)f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Déduisez-en que $f(x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

b) Est-ce possible ? Que pensez-vous de la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f'^2$?

Q 10.

a) Montrez que la fonction $f.f'$ a des limites réelles en $+\infty$ et en $-\infty$, puis que ces limites sont nulles.

b) Justifiez finalement l'inégalité $\displaystyle\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} f''^2$.

Q 11. Étudiez le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Corrigé

Problème 1

I.

Q 1.

Q 2.

Q 3.

Q 4.

Q 5.

II.

Q 6.

a)

b)

Q 7.

a)

b)

Q 8.

Problème 2

I.

Q 1. la fonction $x \mapsto f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x)$ est continue sur $]0,1[$.

Quand $x \to 0$, $\operatorname{cotan}(\pi x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \sim \dfrac{1}{\pi x}$ donc $f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \times \dfrac{f'(x)}{\pi} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{f'(0)^2}{\pi}$: on a une fausse singularité en 0.

Quand $x \to 1$, $\operatorname{cotan}(\pi x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \sim \dfrac{-1}{\pi(1-x)}$ donc $f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \dfrac{-f'(x)}{\pi} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{-f'(1)^2}{\pi}$: on a aussi une fausse singularité en 1.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Par intégration par parties, sous réserve de validité, on a : $\displaystyle\int_0^1 f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{f(x)^2}{2}\operatorname{cotan}(\pi)\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{f(x)^2}{2} \times \frac{-\pi}{\sin^2(\pi x)}\,\mathrm{d}x$.

Or le crochet de variations converge, car $\dfrac{f(x)^2}{2}\operatorname{cotan}(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \times \dfrac{f(x)}{2\pi} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et de même quand x tend vers 1. Donc ceci justifie la validité de l'intégration par parties. De plus, on obtient $\displaystyle\int_0^1 f(x)f'(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)^2}{2} \times \frac{\pi}{\sin^2(\pi x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{f(x)^2}{\sin^2(\pi x)}\,\mathrm{d}x$.

Q 2. Simple développement de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \Big(f'(x) - \pi f(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\Big)^2\,\mathrm{d}x$ et utilisation de la question précédente.

Q 3. Comme la fonction $x \mapsto \Big(f'(x) - \pi f(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\Big)^2$ est positive sur $]0,1[$, son intégrale est positive donc d'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^1 f'^2 - \pi^2 \int_0^1 f^2 \geqslant 0$.

Il y a égalité dans cette inégalité si et s.si $\displaystyle\int_0^1 \Big(f'(x) - \pi f(x)\operatorname{cotan}(\pi x)\Big)^2\,\mathrm{d}x = 0$: or il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur $]0,1[$ et positive, donc d'après le th. de stricte positivité de l'intégrale, l'égalité est équivalente à la nullité de la fonction $x \mapsto \Big(f'(x) - \pi f(x)\cotan(\pi x)\Big)^2$,

c'est-à-dire si f est solution de l'équation différentielle $y' - \pi\cotan(\pi x)y = 0$, qui a pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\sin(\pi x)$, où λ est un réel.

Réciproquement, ces fonctions vérifient bien les hypothèses de cette partie et l'égalité $\displaystyle\int_0^1 f'^2 = \pi^2\int_0^1 f^2$.

II.

Q 4.

a) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \times \sqrt{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \times \sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0) \times 0 = 0$: on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

b) g est une quotient de deux fonctions de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ donc elle l'est aussi (th. d'opérations sur les fonctions de classe C^2). La suite s'obtient par dérivation de l'égalité $f(x) = \sqrt{x} \times g(x)$ et passage au carré.

Q 5. D'abord, on remarque que les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{4x}g(x)^2 = \dfrac{f(x)^2}{4x^2}$, $x \mapsto xg'(x)^2$ et $x \mapsto g(x)g'(x)$ sont continues sur $]0,+\infty[$ donc on peut parler des intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b \ldots \mathrm{d}x$.

Soit $0 < a < 1 < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b xg'(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{1}{4x}g(x)^2\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle= \int_0^X xg'(x)^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{f(x)^2}{4x^2}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle= \int_a^b xg'(x)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_a^b \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{g(x)^2}{2}\right]_{x=a}^b = \int_a^b xg'(x)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_a^b \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{g(b)^2}{2} - \frac{g(a)^2}{2}.$

Or f'^2 est une fonction positive et intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $\displaystyle\int_a^b f'^2 \leqslant \int_0^{+\infty} f'^2 = K$, donc on a montré que pour tout $0 < a < 1 < b$, $\displaystyle\int_a^b xg'(x)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_a^b \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{g(b)^2}{2} \leqslant \frac{g(a)^2}{2} + K.$

Or g est continue sur le segment $[0,1]$, donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in]0,1]$, $\dfrac{g(a)^2}{2} \leqslant L$, donc pour tout $0 < a < 1 < b$, $\displaystyle\int_a^b xg'(x)^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_a^b \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{g(b)^2}{2} \leqslant K + L.$

Comme il s'agit d'une somme de trois réels positifs, on en déduit que pour tout $0 < a < 1 < b$, $\displaystyle\int_a^b xg'(x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant K + L$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 4(K + L)$.

D'après le cours, comme les fonctions $x \mapsto g'(x)^2$ et $x \mapsto \dfrac{f(x)^2}{x^2}$ sont positives, on en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg'(x)^2\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ sont convergentes. En faisant tendre a vers 0, on obtient aussi : pour tout $b > 1$, $\displaystyle\frac{g(b)^2}{2} = \int_0^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^b xg'(x)^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^b \frac{f(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (rappel : $g(a) \xrightarrow[a\to 0]{} 0$).

De plus, ceci prouve aussi que $\dfrac{g(b)^2}{2}$ a alors une limite finie quand $b \to +\infty$, comme somme de trois fonctions ayant une limite réelle en $+\infty$.

Q 6. Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{4x}g(x)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell^2}{4x}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4x}g(x)^2\,\mathrm{d}x$ diverge, ce qui contredit ce qui précède, donc $\ell = 0$.

Q 7.

III.

Q 8.

a)

b)

Q 9.

a)

b)

Q 10.

a)

b)

Q 11.