Problème 1 - D'après E3A PSI 2018

Dans tout le problème, I est l'intervalle $[1;+\infty[$.

On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur I à valeurs réelles, et $\mathscr{E}_1 = \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de fonctions de classe C^1 sur I à valeurs réelles.

Soit a un **réel strictement positif**.

Pour tout f de $\mathscr{E}$, on considère l'équation différentielle sur I :

$$y' - ay + f = 0 \qquad (E_a^f)$$

I. Une application définie sur $\mathscr{E}$

Q 1. Soient $f \in \mathscr{E}$ et $z \in \mathscr{E}_1$.

Montrer que z est solution de (E_a^f) si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\, x \in I, \quad z(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Q 2. Prouver que s'il existe une solution de (E_a^f) qui soit bornée sur I, alors celle-ci est unique.

Q 3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Q 4. Démontrer que la fonction $F : x \in I \mapsto e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique solution de (E_a^f) bornée sur I.

On définit ainsi une application U_a de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à toute fonction f de $\mathscr{E}$ associe la fonction $F = U_a(f)$ ainsi obtenue.

II. Étude de quelques propriétés de U_a

Q 5.

a) Expliciter $U_a(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1.

b) Vérifier que U_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

c) L'endomorphisme U_a est-il injectif ? Est-il surjectif ?

Q 6.

a) Pour $r \in [0,+\infty[$, on note f_r la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $x \mapsto e^{-rx}$. Déterminer $U_a(f_r)$.

b) Étudier la convergence de la suite $(U_a^n(f_r)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x \in I$.

c) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} U_a^n(f_r)(x)$ pour $x \in I$ et déterminer sa somme lorsqu'elle converge.

Q 7. Prouver que l'on a, pour tout élément f de $\mathscr{E}$:

$$\forall\, x \in I, \quad U_a(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

Q 8. Pour tout entier naturel k, on note g_k la fonction de $\mathscr{E}$ définie par : $g_k(x) = e^{-x}x^k$.

Pour tout entier naturel p, on note $\mathscr{F}_p = \mathrm{vect}(g_0,\dots,g_p)$.

a) Donner une base $\mathscr{B}_p$ de $\mathscr{F}_p$.

b) Vérifier que $\mathscr{F}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ stable par U_a.

c) Calculer le déterminant de la restriction de U_a à $\mathscr{F}_p$.

Q 9. Prouver que l'on a : $\forall\, f \in \mathscr{E}$, $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

Q 10. Soit f dans $\mathscr{E}$ à valeurs positives. En est-il de même pour $U_a(f)$?

Q 11. Soit f dans $\mathscr{E}$ décroissante. Prouver que $aU_a(f) \leqslant f$ puis que $U_a(f)$ est décroissante.

Q 12. On note :

— $\mathscr{H}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}$ de classe C^1 sur I et tels que f' est bornée sur I.

— D l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{H}$.

Soit $f \in \mathscr{H}$.

a) Montrer que l'on a : $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

b) En déduire que U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

III. Comportement asymptotique

Q 13. Soient f et g dans $\mathscr{E}$ avec g à valeurs positives et $f = \underset{+\infty}{o}(g)$. Montrer que $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(g))$.

Q 14. Soient f et g dans $\mathscr{E}$, g à valeurs positives telles que $f \underset{+\infty}{\sim} g$. Montrer que $U_a(f) \underset{+\infty}{\sim} U_a(g)$.

Q 15. Soit $f \in \mathscr{E}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $U_a(f)$ admet aussi une limite finie en $+\infty$.

Q 16. Pour tout réel strictement positif ω, on note pour toute la suite du problème, h_ω la fonction de $\mathscr{E}$ qui à $t \in I$ associe $\dfrac{1}{t^\omega}$ et $H_\omega = U_a(h_\omega)$.

a) Montrer que l'on a pour tout $x \in I$: $H_\omega(x) = \dfrac{h_\omega(x)}{a} - \dfrac{\omega}{a} H_{\omega+1}(x)$.

b) En déduire que : $H_\omega(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{h_\omega(x)}{a}$.

IV. Intégrabilité

Q 17. Montrer que si $r > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\,\mathrm{d}t$ converge (f_r définie en question **6**).

Q 18. Pour les fonctions h_ω définies à la question **16**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Q 19. Soit $f \in \mathscr{E}$, à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

On note $\varphi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $F = U_a(f)$ et $\Phi : x \in I \mapsto \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Vérifier que l'on a pour tout $x \in I$: $\Phi'(x) - a\Phi(x) + \varphi(x) - F(1) = 0$.

b) Prouver que $\varphi \in \mathscr{E}$.

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Q 20. Soit $f \in \mathscr{E}$ intégrable sur I. Montrer que $U_a(f)$ est aussi intégrable sur I.

Devoir non surveillé 2 - Corrigé

Problème 1

I.

Q 1. Les solutions de l'équation homogène associée $y' - ay = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, où $K \in \mathbb{R}$.

La fonction $z : x \mapsto -e^{ax} \int_1^x e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et sa dérivée vérifie $z'(x) = -a\,e^{ax} \int_1^x e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t - e^{ax} \times e^{-ax} f(x)$, donc $z'(x) = -f(x) - az(x)$, donc z est une solution particulière de (E_a^f).

D'après le cours, les solutions de l'équation linéaire (E_a^f) sont donc les fonctions $x \mapsto e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ où K est une constante.

Q 2. Si z_1 et z_2 sont deux solutions de (E_a^f), alors il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $z_1(x) = e^{ax}\left(K_1 - \int_1^x e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et $z_2(x) = e^{ax}\left(K_2 - \int_1^x e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Si de plus z_1 et z_2 sont bornées sur I, alors $z_1 - z_2$ l'est aussi, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|z_1(x) - z_2(x)| \leqslant M$, c'est-à-dire $|K_1 - K_2| \leqslant Me^{-ax}$. En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $K_1 = K_2$ donc $z_1 = z_2$.

Ainsi si (E_a^f) admet une solution bornée sur I, alors celle-ci est unique.

Q 3. f est bornée sur I, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $|f(t)| \leqslant M$ donc $|f(t)e^{-at}| \leqslant Me^{-at}$.

Or $a > 0$ donc d'après le cours, $\int_1^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge, donc par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Q 4.

— La fonction F est bien une solution de (E_a^f) sur I puisqu'elle est de la forme donnée en question 1, pour $K = \int_1^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$ (par relation de Chasles), qui est bien une constante réelle par la question précédente.

— Soit M un majorant de $|f|$ sur I (M existe par hypothèse sur f). Alors par croissance de l'intégrale, $\forall\, x \in I$, $|F(x)| \leqslant e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at} |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant Me^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$. Or $\int_x^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = [\frac{e^{-at}}{-a}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-ax}}{a}$.

Donc $\forall\, x \in I$, $|F(x)| \leqslant \frac{M}{a}$. Ainsi, la fonction F est bornée sur I.

On a montré que F est une solution bornée de (E_a^f) sur I, et par **1.2**, elle est unique.

II.

Q 5.

a) Simple calcul : $U_a(f) = \frac{1}{a}$.

b) L'application U_a est linéaire par linéarité de l'intégrale. En effet, pour tous $f, g \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: (en notant $f_a : t \mapsto e^{-at}$)

$\forall\, x \in I$, $U_a(\lambda f + g)(x) = e^{ax} \int_x^{+\infty} f_a \times (\lambda f + g) = e^{ax} \int_x^{+\infty} (\lambda f_a f + f_a g) = \lambda e^{ax} (\int_x^{+\infty} f_a f + \int_x^{+\infty} f_a g) = \lambda U_a(f)(x) + U_a(g)(x)$, donc $U_a(\lambda f + g) = \lambda U_a(f) + U_a(g)$.

On a montré que U_a est linéaire de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$, i.e. que U_a est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

c) Soit $f \in \mathscr{E}$. Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$. Ainsi si $U_a(f) = 0$ (fonction nulle sur I), alors $U_a(f)' = 0$, et donc $f = 0$.

Cela montre que $\mathrm{Ker}(U_a) = \{0\}$, i.e. que U_a est injectif.

Pour tout $f \in \mathscr{E}$, $U_a(f)$ est dérivable sur I puisque c'est une solution sur I de l'équation différentielle d'ordre un (E_a^f), et $U_a(f)' = aU_a(f) - f$ est continue comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Donc $U_a(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, i.e. $U_a(f) \in \mathscr{E}_1$.

On vient de montrer que $\mathrm{Im}(U_a) \subset \mathscr{E}_1$. Ainsi, aucun élément de $\mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_1$ n'a d'antécédent par U_a. Comme l'ensemble $\mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_1$ est non vide (il contient par exemple la fonction f définie par $f(x) = x$ sur $[1, 2]$ et $f(x) = 2$ sur $]2, +\infty[$, qui est continue et bornée sur I, mais pas dérivable en 2), cela montre que U_a n'est pas surjectif.

Q 6.

a) Pour tout $x \in I$, $U_a(f_r)(x) = e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-(a+r)t}\,\mathrm{d}t = e^{ax}\Big[\frac{e^{-(a+r)t}}{-(a+r)}\Big]_x^{+\infty} = e^{ax}\frac{e^{-(a+r)x}}{a+r} = \frac{e^{-rx}}{a+r} = \frac{1}{a+r}f_r(x)$.

Donc $U_a(f_r) = \dfrac{1}{a+r}f_r$.

b) Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_a^n(f_r) = \dfrac{1}{(a+r)^n}f_r$.

Or $\dfrac{1}{a+r} > 0$ et pour tout $x \in I$, $f_r(x) \neq 0$, on en déduit que :

— si $\dfrac{1}{a+r} < 1$, i.e. si $a+r > 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 (fonction nulle),

— si $a+r = 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à f_r, donc converge simplement vers f_r,

— si $\dfrac{1}{a+r} > 1$, i.e. si $a+r < 1$, alors la suite $(U_a^n(f_r))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

c) La série $\sum U_a^n(f_r)$ converge simplement sur I si et seulement si $\dfrac{1}{a+r} < 1$, i.e. $a+r > 1$.

Le cas échéant, on a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_a^n(f_r) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{a+r}\Big)^n f_r = \frac{1}{1-\frac{1}{a+r}}f_r = \frac{a+r}{a+r-1}f_r$.

Q 7. Soit $x \in I$. Le changement de variable $u = t - x$ est valide dans l'intégrale définissant $U_a(f)(x)$ puisque la fonction affine $t \mapsto t - x$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]x, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, et donne :

$$U_a(f)(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = e^{ax}\int_0^{+\infty} e^{-a(x+u)}f(x+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-au}f(x+u)\,\mathrm{d}u$$

C'est le résultat voulu (en remplaçant u par t).

Q 8.

a) Montrons que la famille $\mathscr{B}_p = (g_0, \dots, g_p)$ est libre. Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ est tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\lambda_k g_k = 0$ (fonction nulle sur I), alors pour tout $x \in I$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\lambda_k x^k e^{-x} = 0$, et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\lambda_k x^k = 0$ puisque $e^{-x} \neq 0$. Ainsi le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\lambda_k X^k$ admet une infinité de racines (car $I = [1, +\infty[$ est infini), donc c'est le polynôme nul, i.e. $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Ainsi $\mathscr{B}_p$ est libre, et comme elle engendre $\mathscr{F}_p$ par définition, c'en est une base.

b) Pour montrer que $\mathscr{F}_p = \mathrm{vect}(g_0, \dots, g_p)$ est stable par U_a, il suffit, vu la linéarité de U_a, de montrer que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p$. Or pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} U_a(g_k)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}g_k(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-(x+t)}(x+t)^k\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i t^{k-i}\,\mathrm{d}t \quad \text{par la formule du binôme,} \\ &= \sum_{i=0}^{k} e^{-x}x^i\binom{k}{i}\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}t^{k-i}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Autrement dit, $U_a(g_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\lambda_{i,k}g_i$ où $\lambda_{i,k} = \binom{k}{i}\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}t^{k-i}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $U_a(g_k) \in \mathscr{F}_p = \mathrm{vect}(g_0, \dots, g_p)$, donc $\mathscr{F}_p$ est stable par U_a.

c) Les calculs faits en 8.b. montrent que la matrice, dans la base $(g_0, \dots, g_p)$, de l'endomorphisme de $\mathscr{F}_p$ induit par U_a, est triangulaire supérieure, et a pour coefficients diagonaux les $\lambda_{k,k} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(a+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+1}$, pour $k \in [\![0, p]\!]$.

Son déterminant, qui est le déterminant demandé, est donc $\displaystyle\prod_{k=0}^{p}\lambda_{k,k} = \frac{1}{(a+1)^{p+1}}$.

Q 9. Pour tout $f \in \mathscr{E}$, on a $|f| \in \mathscr{E}$, de sorte que $U_a(f)$ et $U_a(|f|)$ sont bien définis. Et par croissance de l'intégrale, on a alors, pour tout $x \in I$, $|U_a(f)(x)| = |e^{ax}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t| \leqslant e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}|f(t)|\,\mathrm{d}t = U_a(|f|)(x)$.

Donc $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$.

Q 10. Si f est positive, alors de façon évidente au vu des formules définissant $U_a(f)$ en **1.4** ou en **4**, on a par positivité de l'intégrale, $\forall\, x \in I$, $U_a(f)(x) \geqslant 0$. Donc si f est positive, il en est de même pour $U_a(f)$.

Q 11. On suppose f décroissante.

— Alors pour tout $x \in I$ et $t \geqslant 0$, on a $f(x+t) \leqslant f(x)$, donc $e^{-at}f(x+t) \leqslant e^{-at}f(x)$, et donc par croissance de l'intégrale avec la formule vue en **4**, $U_a(f)(x) \leqslant f(x) \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{a}$.

Puisque $a > 0$, on a donc $\forall x \in I$, $aU_a(f)(x) \leqslant f(x)$, i.e. $aU_a(f) \leqslant f$.

— Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$. Ainsi $U_a(f)' = aU_a(f) - f \leqslant 0$ par le point précédent, donc $U_a(f)$ est décroissante.

Q 12.

a) L'hypothèse $f \in \mathscr{H}$ implique $f' \in \mathscr{E}$, de sorte que $U_a(f')$ est bien défini.

Alors par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent, on a pour $x \in I$:

$$U_a(f')(x) = e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = e^{ax}\big[e^{-at}f(t)\big]_x^{+\infty} + ae^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x) + aU_a(f)(x)$$

Ainsi $U_a(f') - aU_a(f) + f = 0$.

b) Comme $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), on a aussi $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$, et donc vu **9.1**, $U_a(f)' = U_a(f')$.

Autrement dit, $\forall f \in \mathscr{H}$, $D \circ U_a(f) = U_a \circ D(f)$, i.e. U_a et D commutent dans $\mathscr{H}$.

III.

Q 13. $f = \underset{+\infty}{o}(g)$ donc $f(x)e^{-ax} = o(e^{-ax}g(x))$ quand $x \to +\infty$. Or les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, donc d'après le cours, les « restes partiels » vérifient la même relation de comparaison : quand $x \to +\infty$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-at}g(t)\,\mathrm{d}t\right)$, donc en multipliant par e^{ax}, $U_a(f)(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(U_a(g)(x))$.

Q 14. Même raisonnement avec l'intégration de la relation $\sim$.

Q 15.

— Cas d'une limite nulle.

Si $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, i.e. si $f = \underset{+\infty}{o}(1)$, alors $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(U_a(1))$.

Or les calculs faits en **Partie 1** donnent $U_a(1) = \dfrac{1}{a}$, donc $U_a(f) = \underset{+\infty}{o}(\dfrac{1}{a})$, i.e. $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = 0$.

— Cas d'une limite non nulle.

Si $\lim\limits_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}^*$, alors en appliquant le point précédent à $f - \ell$, ou la question **2** à l'équivalent $f \underset{+\infty}{\sim} \ell$, on obtient en profitant de la linéarité de U_a, $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \dfrac{\ell}{a}$.

On a montre dans tous les cas que si f converge en $+\infty$, alors $U_a(f)$ aussi, avec $\lim\limits_{+\infty} U_a(f) = \dfrac{1}{a}\lim\limits_{+\infty} f$.

Q 16.

a) Soit $\omega > 0$. Les fonctions h_ω et $h'_\omega = -\omega h_{\omega+1}$ appartiennent à $\mathscr{E}$, donc par intégration par parties dans laquelle tous les termes convergent (la limite en $+\infty$ du terme entre crochets est nulle par croissances comparées), on a pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} H_\omega(x) &= e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}h_\omega(t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^{ax}\Big[\frac{e^{-at}}{-a}h_\omega(t)\Big]_x^{+\infty} - \frac{\omega}{a}e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}h_{\omega+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}h_\omega(x) - \frac{\omega}{a}H_{\omega+1}(x) \end{aligned}$$

qui est l'égalité voulue.

b) On a manifestement $h_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(h_\omega)$, donc par **1**, $H_{\omega+1} = \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$.

On a, d'après la question a, $\dfrac{1}{a}h_\omega = H_\omega + \underset{+\infty}{o}(H_\omega)$, i.e. $\dfrac{1}{a}h_\omega \underset{+\infty}{\sim} H_\omega$, qui est l'équivalent demandé.

IV.

Q 17. D'après la **Partie 1**, $U_a(f_r) = \dfrac{1}{a+r}f_r$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(f_r)(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $r > 0$ (intégrale de référence).

Q 18. D'après la **Partie 2**, on a $H_\omega \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a}h_\omega$, donc les deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (car les fonctions en jeu sont continues et positives sur $I = [x; +\infty[$).

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \omega > 1$ (intégrale de Riemann), donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} H_\omega(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff \omega > 1$.

Q 19.

a) Par définition, $U_a(f)$ est une solution de (E_a^f), donc $U_a(f)' - aU_a(f) + f = 0$, i.e. avec les notations de cette question, $F' - aF + f = 0$. En intégrant cette relation entre 1 et $x \in I$, on obtient, puisque $\Phi' = F$:

$$F(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0 i.e. \Phi'(x) - F(1) - a\Phi(x) + \varphi(x) = 0$$

b) La fonction φ est une primitive de f sur I, donc elle y est continue (même de classe $\mathscr{C}^1$). Et puisque f est positive, on a pour tout $x \in I$, $0 \leqslant \varphi(x) = \displaystyle\int_1^x f \leqslant \int_1^{+\infty} f$, donc φ est bornée sur I. Ainsi, $\varphi \in \mathscr{E}$.

c) On a $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\big(F(x) + \varphi(x) - F(1)\big)$.

Or $F = U_a(f)$ est bornée par construction, et φ est bornée, donc Φ l'est.

Par ailleurs comme f est positive, $F = U_a(f)$ l'est aussi d'après la **Partie 1**, donc Φ est croissante.

Le théorème de la limite monotone implique alors que $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand $x \to +\infty$, ce qui est la définition de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$.

Q 20. On suppose f intégrable, donc la question **3** s'applique à $|f|$ et montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} U_a(|f|)$ converge.

Or d'après la **Partie 1**, on a $|U_a(f)| \leqslant U_a(|f|)$, donc par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |U_a(f)|$ converge, autrement dit $U_a(f)$ est intégrale sur I