Problème 1 - D'après Centrale Marseille MP 2002

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, I un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

On dit que I est

- un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$ quand : $\forall f \in I \quad \forall u \in \mathscr{L}(E) \quad u \circ f \in I$.
- un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$ quand : $\forall f \in I \quad \forall u \in \mathscr{L}(E) \quad f \circ u \in I$.
- un idéal bilatère de $\mathscr{L}(E)$ quand il est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite.

I. Préliminaires

Soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$. On dit que f et g sont équivalents quand il existe $(\varphi, \psi) \in GL(E)^2$ tel que $g = \varphi \circ f \circ \psi$ et on note alors $f \sim g$.

Q 1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{L}(E)$.

Q 2. Montrer que pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2, \quad f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$.

Q 3. Soit I un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$. Montrer que si I contient l'identité, $I = \mathscr{L}(E)$. Montrer la même chose si I contient un automorphisme de E.
On admettra sans difficulté que ces résultats restent vrais si I est un idéal à droite (et donc aussi si I est un idéal bilatère).

Q 4. Soit E, F, G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriel, $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(E, G)$. Montrer que s'il existe $\varphi \in \mathscr{L}(F, G)$ tel que $g = \varphi \circ f$, alors $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Q 5. Soit E, F, G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(E, G)$. On suppose que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. On note $r = \mathrm{rg}(f)$.

a) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$. Montrer alors que $(f(e_1), \ldots, f(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} f$, qu'on peut compléter en une base $(f(e_1), \ldots, f(e_r), u_{r+1}, \ldots, u_p)$ de F.

b) Construire une application linéaire φ de F dans G telle que $g = \varphi \circ f$.

II. Idéaux bilatères

Dans cette partie, I est un idéal bilatère de $\mathscr{L}(E)$ tel que $I \neq \{0\}$. On peut donc choisir un élément non nul f dans I, on note r son rang.

Q 6. Montrer que tout endomorphisme de rang r est dans I.

Q 7. Donner un exemple d'automorphisme de E qui est la somme de $n - r + 1$ endomorphismes de rang r.

Q 8. Concluez cette partie : quels sont les idéaux bilatères de $\mathscr{L}(E)$?

III. Idéaux à gauche

Q 9. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $J_F = \{g \in \mathscr{L}(E) \;/\; F \subset \operatorname{Ker} g\}$.

Montrer que J_F est un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$.

Q 10. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathscr{L}(E \times E, E)$, il existe $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que pour tout $(x, y) \in E \times E$, $\varphi(x, y) = u(x) + v(y)$.

Q 11. Soit $(f, g, h) \in \mathscr{L}(E)^3$ tel que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} h$.

a) On définit $\Phi : E \to E \times E$ en posant $\Phi(x) = (f(x), g(x))$. Quel est le noyau de Φ ?

b) En utilisant l'un des résultats préliminaires, montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $h = u \circ f + v \circ g$.

Dans la suite, I est un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$.

Q 12. Justifier l'existence d'un élément $f_0 \in I$ de rang maximal. On pose alors $F = \operatorname{Ker} f_0$.

Q 13. Soit $g \in I$.

a) Justifier l'existence d'un endomorphisme h de E tel que $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} f_0 \cap \operatorname{Ker} g$.

b) Montrer alors que $h \in I$, puis que $\dim \operatorname{Ker} h \geqslant \dim \operatorname{Ker} f_0$.

c) Montrer que $F \subset \operatorname{Ker} g$.

Q 14. Montrer que $I = J_F$.

IV. Idéaux à droite

Q 15. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $K_F = \{g \in \mathscr{L}(E) \ / \ \operatorname{Im} g \subset F\}$.

Montrer que K_F est un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$.

Q 16. Soit E, F, G 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $(f, g) \in \mathscr{L}(F, G) \times \mathscr{L}(E, G)$. On suppose que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$. Construire une application linéaire φ de E dans F telle que $g = f \circ \varphi$.

Q 17. Soit $(f, g, h) \in \mathscr{L}(E)^3$ tel que $\operatorname{Im} h \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

a) On définit $\Psi : E \times E \to E$ en posant $\Psi(x, y) = f(x) + g(y)$. Quel est l'image de Ψ ?

b) Montrer qu'il existe $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $h = f \circ u + g \circ v$.

Q 18. En vous inspirant de la partie précédente, déterminer les idéaux à droite de $\mathscr{L}(E)$.

Problème 1

I.

Q 1. $GL(E)$ est un groupe pour $\circ$ donc il est stable par inversion et par composition.
- Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Id}_E \in GL(E)$ et $f = \mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donc $f \sim f$: $\sim$ est réflexive.
- Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$, si $f \sim g$ alors il existe $(\varphi, \psi) \in GL(E)^2$ tel que $g = \varphi \circ f \circ \psi$, donc $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \psi^{-1}$, or φ^{-1} et ψ^{-1} sont aussi des automorphismes de E donc $g \sim f$: $\sim$ est symétrique.
- Pour tout $(f,g,h) \in \mathscr{L}(E)^3$, si $f \sim g$ et $g \sim h$, alors il existe $(\varphi, \psi) \in GL(E)^2$ tel que $g = \varphi \circ f \circ \psi$ et $(\sigma, \rho) \in GL(E)^2$ tel que $h = \sigma \circ g \circ \rho$, donc $h = (\sigma \circ \varphi) \circ f \circ (\psi \circ \rho)$, or $\sigma \circ \varphi$ et $\psi \circ \rho$ sont aussi des automorphismes de E, donc $f \sim h$: $\sim$ est transitive.

Au total, $\sim$ est une relation d'équivalence.

Q 2. Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$.
- Un automorphisme φ conserve les dimensions des sous-espaces donc pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$,

  $\mathrm{rg}(\varphi \circ f) = \dim \mathrm{Im}(\varphi \circ f) = \dim \varphi(\mathrm{Im}\, f) = \dim \mathrm{Im}\, f = \mathrm{rg}\, f$

  et $\mathrm{rg}(f \circ \varphi) = n - \dim \mathrm{Ker}(f \circ \varphi) = n - \dim \varphi^{-1}(\mathrm{Ker}\, f) = n - \dim \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{rg}\, f$.

  Donc si $f \sim g$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$.
- Réciproquement, si $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, g$, alors en choisissant une base de E, les matrices A et B de f et g sont de même rang, donc d'après le cours de Première Année, elles sont équivalentes : il existe $(P,Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ tel que $B = PAQ$ donc en posant φ et ψ les endomorphismes de matrices P, Q respectivement, on a $g = \varphi \circ f \circ \psi$ et comme P et Q sont inversibles, φ et ψ sont des automorphismes de E, donc $f \sim g$.

Q 3. Si $\mathrm{Id}_E \in I$, alors pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $u = u \circ \mathrm{Id}_E \in I$, donc $\mathscr{L}(E) \subset I$. L'inclusion inverse étant immédiate, on a $I = \mathscr{L}(E)$.

Si $u \in I \cap GL(E)$, alors $\mathrm{Id}_E = u^{-1} \circ u \in I$, donc d'après ce qui précède, $I = \mathscr{L}(E)$.

Q 4. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $f(x) = 0$ donc $g(x) = \varphi \circ f(x) = \varphi(f(x)) = \varphi(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}\, g$. Ceci prouve donc l'inclusion demandée.

Q 5.

a) La première question est une application immédiate du th. de la base incomplète : on choisit d'abord une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}\, f$ (car d'après le th. du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, f = n - \mathrm{rg}\, f = n - r$), cette famille est alors une famille libre de E et on la complète en une base de E.

La famille $(e_1, \dots, e_r)$ engendre donc un sous-espace vectoriel H supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$. Or d'après le th. du rang, f induit un isomorphisme de H dans $\mathrm{Im}\, f$, donc l'image de cette base de H est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

b) On définit une application linéaire φ de F dans G en fixant les images d'une base (th. du cours), ce qui suffit à définir de manière unique une application linéaire.

$(f(e_1), \dots, f(e_r), u_{r+1}, \dots, u_p)$ est une base de F :
- pour $i \in [\![1, r]\!]$ on pose $\varphi(f(e_i)) = g(e_i)$;
- pour $i \in [\![r+1, p]\!]$ on pose $\varphi(u_i) = 0$.

Alors pour tout $x \in E$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, puis on compare $\varphi(f(x))$ et $g(x)$: comme $e_{r+1}, \dots, e_n$ sont à la fois dans les noyaux de f et de g, on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(e_i)$$

$$\text{donc } \varphi \circ f(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} x_i f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{r} x_i \varphi(f(e_i)) = \sum_{i=1}^{r} x_i g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = g(x).$$

On a donc bien trouvé une application linéaire φ telle que $g = \varphi \circ f$.

II.

Q 6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang r. Alors d'après **Q 2**, $u \sim f$, donc il existe $(\varphi, \psi) \in GL(E)^2$ tel que $u = \varphi \circ f \circ \psi$.

Comme I est un idéal bilatère, on en déduit $u \in I$.

Q 7. On choisit un base de E et on définit les endomorphismes de E par leurs matrices dans cette base : soit $g_1, \dots, g_{n-r+1}$ les endomorphismes de matrices diagonales par blocs suivantes :

$\text{diag}(I_r, 0_{n-r}), \text{diag}(0_1, I_r, 0_{n-r-1}), \text{diag}(0_2, I_r, 0_{n-r-2}), \dots, \text{diag}(0_{n-r}, I_r)$

(on fait glisser les r "1" sur la diagonale vers le bas).

Leur somme est inversible car sa matrice est diagonale avec sur la diagonale des sommes de "1", donc tous non nuls.

Q 8. D'après la question **Q 6**, $g_1, \dots, g_{n-r+1}$ sont dans I donc comme I est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$, $h = g_1 + \dots + g_{n-r+1}$ appartient aussi à I. Or d'après la question précédente, h est inversible, donc d'après la question **Q 3**, $I = \mathscr{L}(E)$.

Ceci prouve que le seul idéal bilatère et non nul de $\mathscr{L}(E)$ est $\mathscr{L}(E)$ lui-même. Comme l'ensemble $\{0\}$ est aussi un idéal bilatère, on a donc montré que $\mathscr{L}(E)$ n'a que deux iédaux bilatères : $\{0\}$ et $\mathscr{L}(E)$.

III.

Q 9. D'abord J_F est non vide (l'application nulle est dans J_F).

Ensuite pour tout $(f, g) \in J_F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in F$, alors $f(x) = g(x) = 0$, donc $(\lambda f + g)(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(\lambda f + g)$: ceci prouve que $\lambda f + g \in J_F$, donc que J_F est stable par combinaison linéaire. J_F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Enfin, pour tout $g \in J_F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, comme $\text{Ker}\, g \subset \text{Ker}(u \circ g)$, on en déduit que $F \subset \text{Ker}(u \circ g)$, donc que $u \circ g \in J_F$.

Au total, J_F est donc un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$.

Q 10. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E \times E, E)$.

Pour tout $(x, y) \in E \times E$, $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ et comme φ est linéaire, on a donc $\varphi(x, y) = \varphi(x, 0) + \varphi(0, y)$.

Or il est évident que les applications $u : x \mapsto \varphi(x, 0)$ et $v : y \mapsto \varphi(0, y)$ sont linéaires de E dans E, ce qui montre la propriété demandée.

Q 11.

a) D'abord, on remarque que Φ est linéaire. Ensuite, pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = 0 \iff f(x) = g(x) = 0$ donc $\text{Ker}\,\Phi = \text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, g$.

b) D'après la question **Q 5**, comme $\text{Ker}\,\Phi \subset \text{Ker}\, h$, il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E \times E, E)$ telle que $h = \varphi \circ \Phi$.

Donc pour $x \in E$, $h(x) = \varphi(f(x), g(x))$, que l'on peut réécrire sous la forme $h(x) = u(f(x)) + v(g(x))$ d'après la question **Q 10**, donc on a finalement $h = u \circ f + v \circ g$.

Q 12. L'ensemble des rangs des éléments de I est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée par $n = \dim E$, donc il admet un maximum (propriété fondamentale de $\mathbb{N}$).

Il existe donc $f_0 \in I$ de rang maximal.

Q 13.

a) $\text{Ker}\, f_0 \cap \text{Ker}\, g$ est un s.e.v. de E : on peut par exemple choisir un supplémentaire H de $\text{Ker}\, f_0 \cap \text{Ker}\, g$ puis poser h le projecteur sur h parallèlement à $\text{Ker}\, f_0 \cap \text{Ker}\, g$.

b) D'après la question **Q 11**, il existe $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $h = u \circ f_0 + v \circ g$. Or f_0 et g sont dans I idéal à gauche, donc $u \circ f$ et $v \circ g$ appartiennent aussi à I puis $h = u \circ f_0 + v \circ g$ est dans I (rappel : I est un s.e.v.).

Comme f_0 est de rang maximal dans I, $\text{rg}\, h \leqslant \text{rg}\, f_0$ donc d'après le th. du rang, $\dim \text{Ker}\, h \geqslant \dim \text{Ker}\, f_0$.

c) Or $\text{Ker}\, h = \text{Ker}\, f_0 \cap \text{Ker}\, g \subset \text{Ker}\, f_0$ donc $\dim \text{Ker}\, h \leqslant \dim \text{Ker}\, f_0$. Avec la question précédente, on a égalité des dimensions et avec l'inclusion initiale, l'égalité des noyaux : $\text{Ker}\, h = \text{Ker}\, f_0 = F$.

Mais on a aussi $\text{Ker}\, h \subset \text{Ker}\, g$, donc finalement $F \subset \text{Ker}\, g$.

Q 14. La question précédente prouve que $I \subset J_F$.

Réciproquement, soit $g \in J_F$, alors $F = \text{Ker}\, f_0 \subset \text{Ker}\, g$, donc d'après la question **Q 5**, il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g = u \circ f_0$. Comme évidemment $f_0 \in I$ et que I est un idéal à gauche, on en déduit que $g \in I$. Ceci prouve l'inclusion $J_F \subset I$.

Au total, $I = J_F$.

IV.

Q 15. D'abord K_F est non vide (l'application nulle est dans K_F).

Ensuite pour tout $(f, g) \in K_F^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in F$, alors $f(x) \in F$ et $g(x) \in F$, donc $(\lambda f + g)(x) \in F$: ceci prouve que $\mathrm{Im}(\lambda f+g) \subset F$, donc que K_F est stable par combinaison linéaire. K_F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Enfin, pour tout $g \in K_F$ et $u \in \mathscr{L}(E)$, comme $\mathrm{Im}(g \circ u) \subset \mathrm{Im}\, g$, on en déduit que $\mathrm{Im}(g \circ u) \subset F$, donc que $g \circ u \in K_F$.

Au total, K_F est donc un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$.

Q 16. On pose $r = \mathrm{rg}\, g$.

On choisit d'abord une base $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}\, g$, qu'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Alors comme dans la partie 1, la famille $(g(e_1), \ldots, g(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\, g$. Or $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$, donc pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $g(e_i) \in \mathrm{Im}\, f$: on peut donc choisir un antécédent $u_i \in F$ de $g(e_i)$ par f (*i.e.* $f(u_i) = g(e_i)$).

Puis on définit une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ en posant
— pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\varphi(e_i) = u_i$
— pour tout $i \in [\![r+1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = 0$.

Les deux applications linéaires g et $f \circ \varphi$ coïncident alors sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, donc elles sont égales.

Q 17.

a) Il est évident que $\mathrm{Im}\, \Psi = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$.
b) $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Im}\, \Psi$ donc d'après la question précédente, il existe $\varphi \in \mathscr{L}(E, E \times E)$ tel que $h = \Psi \circ \varphi$.

Or φ va de E dans E^2, donc pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = (u(x), v(x))$ où u et v sont deux applications de E dans E. La linéarité de φ entraîne celles de u et v. Donc pour tout $x \in E$, $h(x) = \Psi(u(x), v(x)) = f(u(x)) + g(v(x))$, *i.e.* $h = f \circ u + g \circ v$, où u et v sont deux endomorphismes de E.

Q 18. Soit I un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$. Il existe un élément $g_0 \in I$ de rang maximal. On pose alors $G = \mathrm{Im}\, g_0$.

Soit $f \in I$. $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g_0$ est un s.e.v. de E donc on peut choisir un endomorphisme h de E tel que que $\mathrm{Im}\, h = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g_0$ (par exemple, un projecteur sur $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g_0$).

Alors d'après ce qui précède, il existe $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $h = f \circ u + g_0 \circ v$. Comme f et g_0 sont dans I, idéal à droite, on en déduit que $h \in I$.

Donc $\mathrm{rg}\, h \leqslant \mathrm{rg}\, g_0$. Mais comme $\mathrm{Im}\, g_0 \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g_0 = \mathrm{Im}\, h$, on a l'inégalité inverse $\mathrm{rg}\, g_0 \leqslant \mathrm{rg}\, h$, d'où l'égalité $\mathrm{rg}\, g_0 = \mathrm{rg}\, h$, puis l'égalité des sous-espaces $G = \mathrm{Im}\, g_0 = \mathrm{Im}\, h$. Or $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, h$ donc $\mathrm{Im}\, f \subset G$.

Tout ceci prouve que $I \subset K_G$. Mais l'inclusion inverse est vraie car si $f \in K_G$, alors $\mathrm{Im}\, f \subset G = \mathrm{Im}\, g_0$ donc d'après **Q 16**, il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f = g_0 \circ u$, donc $f \in I$ puisque $g_0 \in I$ et I idéal à droite.

Conclusion : les idéaux à droite de $\mathscr{L}(E)$ sont les ensembles K_G pour G s.e.v. quelconque de E.