Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p, q deux projecteurs de E différents, non triviaux (*i.e.* non nuls et différents de Id_E) et qui commutent.

On pose $u = p + q$.

Q 1. Montrez que si x est un vecteur non nul et λ est un scalaire tels que $p(x) = \lambda x$, alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Q 2. Montrez que $E = (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q) \oplus (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q) \oplus (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q) \oplus (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q)$.

Q 3. Montrez que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} u &= \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \\
\operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id}_E) &= \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \\
\operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) &= (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q) \oplus (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)
\end{aligned}$$

Q 4. Montrez que le polynôme minimal μ_u de u divise $X(X-1)(X-2)$ et que $\mu_u \neq X$ et $\mu_u \neq X - 2$.

Dans toute la suite, on suppose de plus que p est un polynôme en u.

Q 5. Montrez que $\mu_u \neq X - 1$.

Q 6. Montrez que μ_u ne peut pas être de degré 2.

Q 7. Montrez que parmi les deux sous-espaces $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, un et un seul des deux est nul.

Exercice hebdomadaire 4 - Corrigé

Q 1. Par hypothèse, $p(x) = \lambda x$, alors $p^2(x) = \lambda p(x) = \lambda^2 x$, or p est un projecteur donc $p^2 = p$ donc il vient $p(x) = \lambda^2 x$, donc $\lambda x = \lambda^2 x$, donc $(\lambda - \lambda^2)x = 0$. Or $x \neq 0$, donc $\lambda - \lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Q 2. Par analyse-synthèse, on montre que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme $a + b + c + d$, où $a \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, $b \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$, $c \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, $d \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Analyse : on suppose l'existence de a, b, c, d, alors en appliquant p et q, on obtient $p(x) = b + d$ et $q(x) = c + d$, puis $q \circ p(x) = p \circ q(x) = d$.

Donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} d & = & p \circ q(x) = q \circ p(x) \\ b & = & p(x) - p \circ q(x) \\ c & = & q(x) - p \circ q(x) \\ a & = & x - p(x) - q(x) + p \circ q(x) \end{array}\right.$$

Ce qui prouve l'unicité du quadruplet (a, b, c, d).

Synthèse : on vérifie que les quatre vecteurs a, b, c, d définis ci-dessus conviennent. Il est évident que $x = a+b+c+d$, que $d = p \circ q(x) = q \circ p(x) \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, que $p(b) = b$ et $q(b) = 0$ donc que $b \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$, que de même $c \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$ et enfin que $p(a) = q(a) = 0$.

Q 3. L'inclusion $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} u$ est évidente. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker} u$, alors $p(x) = -q(x)$, donc en appliquant p ou q on obtient $p(x) = -p \circ q(x) = -q \circ p(x) = q(x)$, donc au total, $p(x) = q(x) = 0$. Donc $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$. Finalement, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

L'inclusion $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$ est évidente, car si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $p(x) = q(x) = x$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$, alors $2x = p(x) + q(x)$, donc en appliquant p ou q on obtient $2p(x) = p(x) + p \circ q(x)$, donc $p(x) = p \circ q(x) = q \circ p(x) = q(x)$, donc au total, $p(x) = q(x) = x$. Donc $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$. Finalement, $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

Si $x \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q) \oplus (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$, alors $x = b + c$ où $b \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$ et $c \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, donc $p(x) = b$ et $q(x) = c$ donc $u(x) = p(x) + q(x) = b + c = x$ donc $x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$. Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$, alors $x = p(x) + q(x)$, donc en appliquant p on obtient $p(x) = p(x) + p \circ q(x)$ donc $p \circ q(x) = q \circ p(x) = 0$, autrement dit $p(x) \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$ et $q(x) \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, ce qui prouve que $u(x) = p(x) + q(x) \in (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q) \oplus (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$. Finalement, $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q) \oplus (\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q)$.

Q 4. On a donc montré que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$, donc pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = a+b+c$ où $a \in \operatorname{Ker} u$, $b \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}_E)$ et $c \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E)$.

Alors $u(x) = b + 2c$, $u^2(x) = b + 4c$, $u^3(x) = b + 8c$. Or $v = u \circ (u - \operatorname{Id}_E) \circ (u - 2\operatorname{Id}_E) = u^3 - 3u^2 + 2u$, donc $v(x) = (b + 8c) - 3(b + 4c) + 2(b + 2c) = 0$.

Ceci prouve que le polynôme $X(X - 1)(X - 2)$ est annulateur de u, donc que μ_u divise $X(X - 1)(X - 2)$.

Si $\mu_u = X$, alors $u = 0$ donc $q = -p$, mais comme $p \neq 0$, il existe $x \neq 0$ tel que $p(x) = x$ donc $q(x) = -x$, ce qui est impossible d'après la question **Q 1**.

Si $\mu_u = X - 2$, alors $u = 2\operatorname{Id}_E$, donc $q = 2\operatorname{Id}_E - p$, mais comme p est un projecteur différent de Id_E, il existe $x \neq 0$ tel que $p(x) = x$, donc $q(x) = 2x$, ce qui est encore impossible d'après **Q 1**.

Q 5. Si $\mu_u = X - 1$, alors $u = p + q = \operatorname{Id}_E$, or il existe un polynôme P tel que $p = P(u)$, donc $p = P(\operatorname{Id}_E)$ est une homothétie vectorielle, ce qui pour un projecteur signifie que $p = 0$ ou $p = \operatorname{Id}_E$, ce qui contredit l'hypothèse de l'exercice.

Q 6. Si μ_u est de degré 2, alors $\mathbb{K}[u] = \operatorname{vect}(u, \operatorname{Id}_E)$ donc il existe $(\alpha, \beta) \in K^2$ tel que $p = \alpha u + \beta \operatorname{Id}_E$.

Si $\mu_u = X(X - 2)$, alors en choisissant un vecteur $x \neq 0$ dans $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} p$, on a alors $u(x) = p(x) = 0$, donc $\beta x = 0$ donc $\beta = 0$. Puis en choisissant $x \neq 0$ dans $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Im} p$, on a $u(x) = 2x = \alpha x$ donc $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Donc finalement, $p = \dfrac{1}{2}u = q$, ce qui contredit l'hypothèse.

Si $\mu_u = X(X - 1)$, alors de même on montre que $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ ou 1, ce qui implique $p = 0$ ou $p = \operatorname{Id}_E$, encore contradictoire avec l'hypothèse.

Et de même si $\mu_u = (X - 1)(X - 2)$.

Q 7. Il ne reste donc qu'un seul cas : $\mu_u = X(X - 1)(X - 2)$. Dans ce cas, $\mathbb{K}[u] = \operatorname{vect}(u^2, u, \operatorname{Id}_E)$ donc il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que $p = \alpha u^2 + \beta u + \gamma \operatorname{Id}_E$.

En choisissant un vecteur non nul dans $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} p$ et en lui appliquant p, on obtient $\gamma = 0$.

On suppose que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q \neq \{0\}$ et on montre que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q$, alors $p(x) = 0$ et $q(x) = x$, donc $u(x) = x$ donc $0 = (\alpha + \beta)x$. Or en choisissant un vecteur $t \neq 0$ dans $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q$ et en lui appliquant p, on obtient aussi $t = (\alpha + \beta)t$, donc $\alpha + \beta = 1$, donc $x = 0$.

De même, si on suppose que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} q \neq \{0\}$, alors on montre que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} q = \{0\}$.