Problème 1

Dans ce problème, n est un entier naturel strictement positif fixé, $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour $P \in E$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement ΔP sans parenthèses. La notation $\Delta^2 P$ désigne donc $\Delta \circ \Delta(P)$ en abrégé.

Q 1. Montrez que Δ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ?

Q 2.

a) Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$ tel que P possède une racine (complexe) a : montrez que P est en fait le polynôme nul.

b) Déterminez $\operatorname{Ker} \Delta$.

c) Déterminez le rang de Δ.

Q 3. Montrez que $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Q 4. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose $G_i = \displaystyle\prod_{k=0}^{i-1} (X-k)$ (et donc en particulier $G_0 = 1$, le produit étant vide).

a) Montrez que la famille $\mathscr{G} = (G_0, \ldots, G_n)$ est une base de E.

b) Pour $i \in [\![0, n]\!]$, calculez ΔG_i en fonction des vecteurs $G_0, \ldots, G_n$.

c) Donnez la matrice de Δ dans la base $\mathscr{G}$.

Q 5. Montrez que Δ est un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $\Delta^p = 0$. Quel est le plus petit entier p vérifiant cette propriété ?

Q 6. On pose $E_0 = \{P \in E \;/\; P(0) = 0\}$.

a) Justifiez que E_0 est un hyperplan de E.

b) On appelle Γ la restriction de Δ à E_0 : montrez que Γ est un isomorphisme de E_0 dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P = \Gamma^{-1}(Q)$. Montrez que pour tout entier naturel N, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} Q(k) = P(N+1)$.

Q 7. On veut montrer par récurrence sur m la formule de Grégory : si P est un polynôme de E de degré inférieur ou égal à m, alors

$$P = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} G_k$$

a) Montrez que cette égalité est vraie pour $m = 0$.

b) On suppose que la proposition est vraie au rang $m-1$. Soit P de degré au plus m, que dire du degré de ΔP ? Montrez que $P - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} G_{k+1}$ est un polynôme constant, puis concluez.

Q 8. Soit $P \in E$.

a) Calculez $\Delta^2 P$, $\Delta^3 P$ (éventuellement $\Delta^4 P$) en fonction de P et émettez une conjecture à propos de $\Delta^m P$ où m désigne un entier naturel.

b) Démontrez cette conjecture.

c) Montrez que $\Delta^k P(0)$ se calcule à l'aide des valeurs $P(0), \ldots, P(k)$ et des coefficients du binôme.

Q 9. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donnez une expression explicite de $\Gamma^{-1}(Q)$ en fonction de Q.

Q 10. Exemple : dans cette question, on prend $n = 5$ et $Q = X^4$. Pour $N \in \mathbb{N}$, donnez une expression explicite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k^4$ en fonction de N.

Q 11. Soit $P \in E$. On pose $\|P\| = \displaystyle\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^k P)(0)\right|$. Montrer que $\| \;\|$ est une norme sur E.

Q 12.

a) Justifier que Δ est une application continue de $(E, \| \;\|)$ dans $(E, \| \;\|)$.

b) Déterminez sa norme triple $|||\Delta|||$.

Problème 2 - D'après E3A MP 2018

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ f_n = h_n - \ln(n)$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1 \text{ et pour } n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})\ ;\ v_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})$$

Q 1. Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \mapsto x + \ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

Q 2. Soit n un entier naturel. Quel est le signe de u_n ?

Q 3. Justifier que les séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ sont convergentes.

Q 4. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{N}(v_n - u_n)$ en fonction de N pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3.

Q 5. Que peut-on dire des suites $\left(\sum_{n=1}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$? Justifier que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Dans la suite, on note γ la somme des séries $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

Q 6. Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0, 1[$.

Q 7. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que :

$$\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

Q 8. Justifier que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q 9. Démontre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ.*Indication* : exprimer les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N} u_n$ en fonction des termes de la suite (f_n).

Q 10. Soit r un entier naturel > 1.

a) Dessiner le graphe de la fonction $(g : x \mapsto 1/x^r)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Justifiez que g possède une primitive G sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $\lim_{+\infty} G = 0$.

Q 11. Soit (w_n) une suite de nombres réels qui converge vers 0.

On suppose que la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell > 0$.

a) Soient a, b dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $0 < a < \ell < b$. Justifier l'existence d'un entier naturel N supérieur ou égal à 2 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on ait les inégalités :

$$a \leqslant n^r(w_{n+1} - w_n) \leqslant b$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N :

$$a \int_{N}^{n+1} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t \leqslant w_{n+1} - w_N \leqslant b \int_{N-1}^{n} \frac{1}{t^r}\,\mathrm{d}t$$

c) En déduire l'encadrement :

$$b\,G(N-1) \leqslant w_N \leqslant a\,G(N)$$

où G a été définie dans la question **Q 10 b**.

d) Démontrer que la suite $(n^{r-1}w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et expliciter en fonction de ℓ et r sa limite.

e) Ce résultat reste-t-il vrai si la limite ℓ de la suite $(n^r(w_{n+1} - w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est 0 ?

Q 12. Démontrer qu'il existe un nombre réel α que l'on explicitera tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

Indication : on appliquera les résultats de la question **Q 11** à une suite bien choisie.

Problème 1

Q 1. Soit $(P,Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Delta(P+Q) = (P+Q)(X+1) - (P+Q)(X) = P(X+1) + Q(X+1) - P(X) - Q(X) = \Delta(P) + \Delta(Q)$ et $\Delta(\lambda P) = (\lambda P)(X+1) - (\lambda P)(X) = \lambda P(X+1) - \lambda P(X) = \lambda \Delta(P)$.

Δ est donc une application linéaire. De plus, comme $\deg P(X+1) = \deg P(X)$, on a donc $\deg \Delta(P) \leqslant \deg P$, donc si $\deg P \leqslant n$, alors $\deg \Delta P \leqslant n$.

Au total, Δ est un endomorphisme de E.

Il est non injectif, car $\Delta 1 = 0$, donc $\operatorname{Ker} \Delta$ n'est pas réduit au singleton nul.

Q 2.

a) $P \in \operatorname{Ker} \Delta$ donc $P(X+1) = P(X)$. Comme a est racine de P, on a alors $P(a+1) = P(a) = 0$ donc $a+1$ est encore racine de P.

Par une récurrence évidente, on a alors : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a+k$ est racine de P, donc P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

b) Soit $P \in \operatorname{Ker} \Delta$. Si P a une racine, alors il est nul d'après ce qui précède ; si P n'a pas de racine, alors P est constant.

Ceci prouve que $\operatorname{Ker} \Delta \subset \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.

Mais l'inclusion réciproque est évidente, donc $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}$.

c) D'après le th. du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} \Delta + \operatorname{rg} \Delta$. Or $\operatorname{Ker} \Delta$ est une droite vectorielle, donc $\operatorname{rg} \Delta = \dim E - 1 = n$.

Q 3. On remarque aisément que si $\deg P \leqslant p$, alors $\deg \Delta P \leqslant p-1$, car les coefficients dominants de $P(X+1)$ et $P(X)$ sont les mêmes, donc ils se simplifient dans ΔP.

Donc $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Or d'après la question précédente, ces deux s.e.v. ont la même dimension n, donc ils sont égaux.

Q 4.

a) $\mathscr{G}$ est une famille de polynômes étagée en degré, donc elle est libre. De plus, elle a $n+1$ vecteurs et $\dim E = n+1$, donc c'est une base de E.

b) Simple calcul : $\Delta G_0 = 0$ et pour $i \geqslant 1$, $\Delta G_i = i G_{i-1}$.

c) $$\operatorname{mat}_{\mathscr{G}} \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & — & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \diagdown & | \\ | & | & 0 & \ddots & 0 \\ | & | & | & \diagdown & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & — & 0 \end{pmatrix}$$

Q 5. $\Delta G_k = k G_{k-1}$ donc $\Delta^2 G_k = k(k-1) G_{k-2} \dots$

Par récurrence évidente, on montre que pour tout $p \in [\![0,k]\!]$, $\Delta^p G_k = \dfrac{k!}{(k-p)!} G_{k-p}$.

En particulier, $\Delta^n G_n = n! G_0$ donc $\Delta^{n+1} G_n = 0$.

Ceci prouve déjà que le plus petit entier p tel que $\Delta^p = 0$ est au moins égal à $n+1$ (s'il existe).

En fait pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $\Delta^{n+1} G_p = \Delta^{n-p} \Delta^{p+1} G_p = \Delta^{n-p} 0 = 0$.

L'endomorphisme Δ^{n+1} s'annule sur tous les vecteurs d'une base de E, donc il est nul.

On a donc prouvé au total que $\Delta^{n+1} = 0$ et que le plus petit entier p tel que $\Delta^p = 0$ est $n+1$.

Q 6.

a) L'application $P \mapsto P(0)$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et n'est pas nulle, donc c'est une forme linéaire non nulle. Son noyau E_0 est donc un hyperplan de E.

b) $G_0 = 1 \notin E_0$ donc d'après le cours, $E = E_0 \oplus \operatorname{vect}(G_0) = E_0 \oplus \operatorname{Ker} \Delta$. Donc Δ induit un isomorphisme de E_0 dans $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (c'est le démonstration du th. du rang, en fait).

c) P est l'unique antécédent de Q tel que $P(0) = 0$. On a donc $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

On spécialise en k : $P(k+1) - P(k) = Q(k)$, puis on additionne ces égalités (somme téléscopique) :

$$P(N+1) = P(N+1) - P(0) = \sum_{k=0}^{N} Q(k).$$

Q 7.

a) évident, car $G_0 = 1$ et $\Delta^0 = \mathrm{Id}$.

b) Soit P de degré au plus m, le degré de ΔP est au plus $m-1$ donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\Delta P = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^k \Delta P)(0)}{k!} G_k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{k!} G_k$$

Soit $Q = P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} G_{k+1}$. On calcule ΔQ.

$$\Delta Q = \Delta P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} \Delta G_{k+1} = \Delta P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} (k+1) \Delta G_k = \Delta P - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{k!} \Delta G_k = 0$$

Donc Q est constant, il est donc égal à sa valeur en 0 : $Q = P(0)$.

Donc finalement, $P = P(0) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\Delta^{k+1} P)(0)}{(k+1)!} \Delta G_{k+1} = P(0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} \Delta G_k = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} \Delta G_k$.

La proposition est donc vraie au rang m.

Q 8.

a) $\Delta^2 P = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X)$, $\Delta^3 P = P(X+3) - 3P(X+2) + 3P(X+1) - P(X)$

On reconnaît les coefficients du binôme (surtout que c'est dit en-dessous !).

On conjecture : $\Delta^m P = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k)$.

b) Par récurrence. Soit $\mathscr{P}(m)$ la proposition « $\Delta^m P = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k)$ ».

$\mathscr{P}(0)$ est vraie, $\mathscr{P}(1)$ aussi.

Si $\mathscr{P}(m)$ est vraie, alors

$$\Delta^{m+1} P = \Delta \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k) \right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \Delta(P(X+k))$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} (P(X+k+1) - P(X+k)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k+1) - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k)$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} (-1)^{m-j+1} P(X+j) - \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(X+k)$$

$$= (-1)^0 \binom{m}{m} P(X+m+1) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j-1} (-1)^{m-j+1} P(X+j) - \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} P(X+j) - (-1)^m \binom{m}{0} P(X)$$

$$= P(X+m+1) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j-1} (-1)^{m-j+1} P(X+j) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} (-1)^{m+1-j} P(X+j) + (-1)^{m+1} P(X)$$

$$= P(X+m+1) + \sum_{j=1}^{m} \left[\binom{m}{j-1} + \binom{m}{j} \right] (-1)^{m-j+1} P(X+j) + (-1)^{m+1} P(X)$$

$$= P(X+m+1) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m+1}{j} (-1)^{m-j+1} P(X+j) + (-1)^{m+1} P(X)$$

$$= \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} (-1)^{m-j+1} P(X+j)$$

Donc $\mathscr{P}(m+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(m)$ est vraie (rem : c'est la même preuve que la formule du binôme).

c) Immédiat : $\Delta^m P(0) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} P(k)$.

Q 9. On écrit $Q = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\Delta^k Q)(0)}{k!} G_k$, puis on « intègre » (vous aurez remarqué la ressemblance entre la dérivation et l'opérateur Δ) : $\Gamma^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\Delta^k Q)(0)}{(k+1)!} G_{k+1}$

Puis on utilise la relation précédente : $\Gamma^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} Q(j) \frac{G_{k+1}}{(k+1)!}$

Q 10. On applique les résultats des questions 9 et 6*c*, on trouve $\sum_{k=0}^{N} k^4 = \frac{6\,N^5 + 15\,N^4 + 10\,N^3 - N}{30}$

Q 11.

— Si $\|P\| = 0$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\left|(\Delta^k P)(0)\right| = 0$ (une somme de réels positifs est nul si et s.si tous les réels sont nuls).

Donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(\Delta^k P)(0) = 0$, donc d'après le formule de Grégory, $P = 0$.

— Pour tout $P \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda P\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^k(\lambda P))(0)\right| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|\lambda(\Delta^k P)(0)\right|$ (par linéarité de Δ)

$= \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |\lambda| \left|(\Delta^k P)(0)\right| = |\lambda| \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^k P)(0)\right| = |\lambda| \|P\|$ (car multiplier par $|\lambda|$, réel positif, ne change pas l'ordre des nombres, donc conserve le maximum).

— Pour tout $(P, Q) \in E^2$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$\left|(\Delta^k(P+Q))(0)\right| = \left|(\Delta^k(P))(0) + (\Delta^k(Q))(0)\right| \leqslant \left|(\Delta^k(P))(0)\right| + \left|(\Delta^k(Q))(0)\right| \leqslant \|P\| + \|Q\|$,

donc $\|P + Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$.

Au total, $\|\ \|$ est une norme sur E.

Q 12.

a) E est un espace de dimension finie et Δ est linéaire, donc Δ est continue sur E, et ce, quelle que soit la norme choisie sur E.

b) Pour tout $P \in E$, $\|\Delta P\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^k \Delta P)(0)\right| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^{k+1} P)(0)\right| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \left|(\Delta^k P)(0)\right| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^k P)(0)\right|$ car $\Delta^{n+1} P = 0$ d'après la question **Q 5**.

Donc $\|\Delta P\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^k P)(0)\right| \leqslant= \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \left|(\Delta^k P)(0)\right| = \|P\|$.

Ceci prouve que $|||Delta||| \leqslant 1$. Mais comme dans l'inégalité précédente, il y a égalité si $P = X$, donc $|||Delta||| = 1$.

Problème 2

Q 1. La fonction est définie sur $]-\infty, 1[$.

Au voisinage de 0, on a $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et donc $x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Q 2. Par concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\forall x > -1 \quad \ln(1+x) \leqslant x$.

En appliquant ceci pour $n \geqslant 2$ à $-1/n$, on obtient $\forall n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 0$.

Q 3. D'après le développement de la question 1, $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ et $-\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série convergente de signe constant. Ainsi d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP), $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente.

De même, $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$ et $\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série convergente de signe constant. Ainsi d'après le TCSTP, $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ est convergente.

Q 4. On a $v_1 - u_1 = -\ln(2)$ et

$$\forall n \geqslant 2,\ v_n - u_n = -\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 - \frac{1}{n}) = -\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n-1}{n}) = -\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1)$$

On en déduit que $\sum_{n=1}^{N} (u_n - v_n) = -\ln(2) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1)$. Les termes se simplifient et on trouve $\sum_{n=1}^{N} (u_n - v_n) = \ln(N) - \ln(N+1)$.

Q 5. Avec les questions **Q 3** et **Q 4**, les suites proposées convergent (sommes partielles de séries convergentes) et avec la question précédente, la différence vaut $-\ln(1+1/N)$ et est de limite nulle quand $N \to +\infty$. Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Par négativité de u_n pour $n \geqslant 2$ (question 2) et positivité de v_n (de même), la suite des sommes partielles de u décroît et celle des sommes partielles de v croît. Ainsi $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ et $(\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Q 6. En particulier $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \gamma \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k$. Pour $n=1$, on trouve $\gamma \geqslant 1-\ln(2) > 0$ et pour $n=2$, $\gamma \leqslant 1+u_2 < 1$. Donc $\gamma \in]0,1[$.

Q 7. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Une comparaison série intégrale donne alors

$$\forall n \geqslant 2,\ \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t}$$

On en déduit que $\ln(n+1)-\ln(2) \leqslant h_n - 1 \leqslant \ln(n)$ et comme $1-\ln(2) \geqslant 0$, $\forall n \geqslant 2,\ \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1+\ln(n)$.

On vérifie que l'encadrement reste vrai si $n=1$ ($\ln(2) \leqslant 1 \leqslant 1$).

Q 8. On calcule $f_{n+1} - f_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln(1 - \dfrac{1}{n+1}) = u_{n+1} \leqslant 0$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q 9. On reprend l'identité ci-dessus et on somme : $f_N - 1 = f_N - f_1 = \sum_{n=1}^{N-1} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{N} u_n - u_1 = \sum_{n=1}^{N} u_n - 1$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite γ.

Q 10.

a) Fonction décroissante, asymptote verticale en 0 et horizontale ($x=0$) en $+\infty$.

b) Comme $r > 1$, une primitive de la fonction est $G : x \mapsto \dfrac{1}{1-r}\dfrac{1}{x^{r-1}}$, qui a bien pour limite 0 en $+\infty$.

Q 11.

a) On applique la définition de limite avec $\varepsilon = \ell - a > 0$ ce qui donne un rang n_1. On applique la définition de limite avec $\varepsilon = b - \ell > 0$ ce qui donne un rang n_2. On choisit $N = \max(n_1, n_2)$ et on a pour $n \geqslant N$ $|n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leqslant \ell - a$ ET $|n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leqslant b - \ell$. Ainsi

$$\forall 0 < a < \ell < b,\ \exists N /\ \forall n \geqslant N,\ a \leqslant n^r(w_{n+1} - w_n) \leqslant b.$$

b) $x \mapsto 1/x^r$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut derechef effectuer une comparaison série-intégrale pour obtenir

$$\forall n \geqslant N,\ \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leqslant \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^r} \leqslant \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

Avec la question précédente (en divisant par $n^r > 0$ et comme la multiplication par a ou b ne change pas le sens des inégalités)

$$a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leqslant \sum_{k=N}^{n} (w_{k+1} - w_k) \leqslant b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

et finalement,

$$a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leqslant w_{n+1} - w_N \leqslant b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{r}.$$

c) On a donc $a(G(n+1) - G(N)) \leqslant w_{n+1} - w_N \leqslant b(G(n) - G(N-1))$

puis en faisant tendre n vers $+\infty$, $-aG(N) \leqslant -w_N \leqslant -bG(N-1)$ ou encore $bG(N-1) \leqslant w_N \leqslant aG(N)$.

d) oit $\varepsilon > 0$. On utilise ce qui précède avec $a = \ell - \varepsilon$ et $b = \ell + \varepsilon$. Ceci nous donne un rang N. Tout rang plus grand que N convient aussi et $\forall n \geqslant N,\ (\ell+\varepsilon)G(n-1) \leqslant w_n \leqslant (\ell-\varepsilon)G(n)$.

On multiplie par $n^{r-1} \geqslant 0$ ce qui donne

$$\forall n \geqslant N,\ (\ell+\varepsilon)\frac{1}{1-r}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{r-1} \leqslant w_n n^{r-1} \leqslant (\ell-\varepsilon)\frac{1}{1-r}$$

Le majorant tend vers $-(\ell-\varepsilon)\dfrac{1}{r-1}$ et est plus petit que $\dfrac{-\ell+2\varepsilon}{r-1}$ pour n assez grand.Le minorant tend vers $-(\ell+\varepsilon)\dfrac{1}{r-1}$ et est plus grand que $\dfrac{-\ell-2\varepsilon}{r-1}$ pour n assez grand.Il existe donc un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ -\frac{\ell}{r-1}-\frac{2\varepsilon}{r-1} \leqslant w_n n^{r-1} \leqslant -\frac{\ell}{r-1}+\frac{2\varepsilon}{r-1}$$

Par définition des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{r-1} w_n = -\frac{\ell}{r-1}.$$

e) Dans le cas où $\ell=0$, on peut reprendre la preuve. On travaille avec $\varepsilon>0$ et on trouve un rang à partir duquel

$$-\varepsilon \leqslant n^r(w_{n+1}-w_n) \leqslant \varepsilon$$

On somme mais on obtient cette fois

$$-\varepsilon\int_{N-1}^{n}\frac{dt}{t^r} \leqslant w_{n+1}-w_N \leqslant \varepsilon\int_{N-1}^{n}\frac{dt}{t^r}$$

et donc

$$-\varepsilon G(N-1) \leqslant w_N \leqslant \varepsilon G(N-1)$$

On conclut alors encore que $n^{r-1}w_n \to 0$.

Q 12. Posons $w_n=\gamma-f_n$ (à partir du rang 1). On a alors $w_n\to 0$ (question 11) et (questions 8 et 3)

$$w_{n+1}-w_n = f_n - f_{n+1} = -u_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2}$$

Ainsi, $n^2(w_{n+1}-w_n)\to\dfrac{1}{2}$. La question 11 donne alors $nw_n\to-\dfrac{1}{2}$ et donc $w_n\sim-\dfrac{1}{2n}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$