Exercice (Inégalité de Carleman)

Soit a une suite positive telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = (a_1 \dots a_n)^{1/n}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} b_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

b) Pour $k \geqslant 1$, on pose $\alpha_k = k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$. Montrez que $u_n \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$.

c) Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge et déterminez une constante C, indépendante de a, telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant C \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Problème 1 - Étude de $\mathbb{H}$ et d'algèbres valuées - d'après ENS MP 2023

Le problème est constitué de quatre parties, il vous est demandé de ne traiter que les parties 1, 2 et 3, la quatrième vous étant laissée en guise de devoir à la maison si vous le souhaitez.

Notations

Si V est un espace euclidien, on note $\mathscr{L}(V)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de V dans lui-même, $GL(V)$ le groupe des applications $\mathbb{R}$-linéaires bijectives de V sur lui-même, et $O(V) \subset GL(V)$ (respectivement $SO(V) \subset GL(V)$) le groupe orthogonal (respectivement spécial orthogonal) de V.

On rappelle que $O(V) = \{f \in \mathscr{L}(V) \ / \ \forall x \in V \quad \|f(x)\| = \|x\|\}$ et $SO(V) = \{f \in O(V) \ / \ \det(f) = 1\}$.

Par convention, les $\mathbb{R}$-algèbres considérées dans ce problème seront non nulles, mais pas forcément commutatives. Deux $\mathbb{R}$-algèbres A et B sont dites isomorphes s'il existe une bijection $\mathbb{R}$-linéaire $f : A \to B$ telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in A$.

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre et soit $e \in A$ l'élément unité de A pour la multiplication. On notera $\mathbb{R}_A$ la sous-algèbre $\{ae \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ de A. Un élément x de A est dit inversible s'il existe $y \in A$ tel que $xy = yx = e$. On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de A. On admet que $A^\times$ est un groupe pour la multiplication.

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ la $\mathbb{C}$-algèbre des matrices de taille 2×2 à coefficients complexes. Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on note

$$Z(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbb{H} = \{Z(z_1, z_2) \ / \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. On admet que $\mathbb{H}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, admettant comme base les matrices

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ K := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

qui vérifient les relations suivantes dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,\ IJ = -JI = K,\ JK = -KJ = I,\ KI = -IK = J$$

On veillera à ne pas confondre l'élément i de $\mathbb{C}$ et la matrice I de $\mathbb{H} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, ni la matrice I avec la matrice identité E.

On note $\mathbb{H}^{\mathrm{im}} = \{xI + yJ + zK \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{H}$.

On définit une application $N : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ par $N(Z(z_1, z_2)) := |z_1|^2 + |z_2|^2$.

On note $S = \{U \in \mathbb{H} \ / \ N(U) = 1\}$.

I. Préliminaires

Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ on note $A^* = (\overline{a_{ji}}) = \bar{A}^\top$.

Q 1.

a) Montrer que $\mathbb{H}$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ stable par $Z \mapsto Z^*$.

b) Soit $Z \in \mathbb{H}$. Calculer ZZ^* et en déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.

c) Soit $Z \in \mathbb{H}$. Montrer que $Z \in \mathbb{R}_{\mathbb{H}}$ si et seulement si $ZZ' = Z'Z$ pour tout $Z' \in \mathbb{H}$.

Q 2.

a) Montrer que l'on a $N(ZZ') = N(Z)N(Z')$ pour tous $Z, Z' \in \mathbb{H}$.

b) Montrer que S est un sous-groupe de $\mathbb{H}^{\times}$ et que $\dfrac{1}{\sqrt{N(Z)}} Z \in S$ pour tout $Z \in \mathbb{H}^{\times}$.

Q 3.

a) Montrer que pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a

$$N(xE + yI + zJ + tK) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

b) Montrer que pour tout $U \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ on a $U^2 = -N(U)E$ et que

$$\mathbb{H}^{\mathrm{im}} = \left\{U \in \mathbb{H} \;/\; U^2 \in]-\infty, 0]\, E\right\}$$

La question 3a) montre que l'on définit un produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ sur $\mathbb{H}$ en posant, pour $Z, Z' \in \mathbb{H}$

$$\langle Z, Z' \rangle = \frac{N(Z + Z') - N(Z) - N(Z')}{2},$$

et que l'on dispose d'une isométrie

$$\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{H}, \psi(x, y, z, t) := xE + yI + zJ + tK$$

de $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel sur $\mathbb{H}$. On munit par la suite $\mathbb{H}$ de sa structure d'espace euclidien induite par le produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$. Ainsi (E, I, J, K) est une base orthonormée de $\mathbb{H}$.

Q 4. Montrer que S est une partie fermée et connexe par arcs de $\mathbb{H}$.

Q 5. Soient $U, V \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

a) Montrer que U et V sont orthogonaux si et seulement si $UV + VU = 0$. Dans ce cas montrer que $UV \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ et que le déterminant de la famille (U, V, UV) dans la base (I, J, K) de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ est positif ou nul.

b) Montrer que si (U, V) est une famille orthonormale dans $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$, alors (U, V, UV) est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

II. Normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^2$

Le but de cette partie est la preuve du résultat suivant, qui sera utilisé dans la partie IV.

Théorème A. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geqslant 4$.

Alors $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$ et on note

$$\mathscr{C} := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\right\}$$

On fixe une norme quelconque $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ et on note

$$\mathcal{K} = \left\{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;/\; \forall x \in \mathbb{R}^2,\; \|x\|_2 \geqslant \|Ax\|\right\}$$

Q 6.

a) Montrer que $\mathcal{K}$ est une partie compacte et convexe de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{K}$ tel que $\det A = \sup\limits_{B \in \mathcal{K}} \det B$

On fixe par la suite un élément A de $\mathcal{K}$ tel que $\det A = \sup\limits_{B \in \mathcal{K}} \det B$.

Q 7. Montrer que $\det A > 0$ et qu'il existe $x \in \mathscr{C}$ tel que $\|Ax\| = 1$.

On fixe par la suite $x \in \mathscr{C}$ tel que $\|Ax\| = 1$.

Q 8. Soit $B \in SO\left(\mathbb{R}^2\right)$ une matrice telle que $x = B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $r \in]0, 1[$ il existe $x_r \in \mathscr{C}$ tel que

$$\left\| AB \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix} x_r \right\| > 1$$

b) Montrer que si $x_r = \begin{pmatrix} y_r \\ z_r \end{pmatrix}$, alors $z_r^2 > \dfrac{r^2}{1+r^2}$.

Q 9. En utilisant ce qui précède, montrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|Ax\| = \|x\|_2$ pour $x \in \{e_1, e_2\}$.

Q 10. Soit T une partie fermée de $\mathscr{C}$, telle qu'il existe $x, y \in T$ avec $y \notin \{-x, x\}$. On suppose que pour tous $a, b \in T$ avec $b \notin \{-a, a\}$, on a que $\dfrac{b-a}{\|b-a\|_2}$ et $\dfrac{b+a}{\|b+a\|_2}$ appartiennent à T. Montrer que $T = \mathscr{C}$.

Q 11. Montrer le théorème A.

III. Algèbres valuées

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre et e son élément neutre. Dans cette partie, on identifiera $\mathbb{R}_A$ avec $\mathbb{R}$, et on notera (abusivement) a l'élément ae de A pour $a \in \mathbb{R}$. On dit que A est *algébrique* si pour tout $x \in A$ il existe un entier $n \geqslant 1$ et $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

On dit que A est *sans diviseur de zéro* si $xy \neq 0$ pour tous $x, y \in A \backslash \{0\}$. Dans cette partie, nous allons montrer le théorème B ci-dessous, puis l'utiliser pour prouver le théorème C plus loin.

Théorème B. Une $\mathbb{R}$-algèbre algébrique et sans diviseur de zéro est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre algébrique et sans diviseur de zéro.

Q 12.

a) Montrer que $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ pour tout $x \in A$.

b) Montrer que si $x \in A \backslash \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} + \mathbb{R}x$ est une $\mathbb{R}$-algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

On suppose que A n'est pas isomorphe à une des algèbres $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Q 13. Montrer qu'il existe $i_A \in A$ tel que $i_A^2 = -1$.

On fixe par la suite un élément i_A de A tel que $i_A^2 = -1$. On note $U = \mathbb{R} + \mathbb{R}i_A$ et on définit l'application

$$T : A \to A, T(x) = i_A x i_A$$

On note id : $A \to A$ l'application identité de A.

Q 14.

a) Montrer que $T(xy) = -T(x)T(y)$ pour tous $x, y \in A$.

b) Calculer $T^2 = T \circ T$ et en déduire que $A = \ker(T - \mathrm{id}) \oplus \ker(T + \mathrm{id})$.

Q 15. Montrer que $\ker(T + \mathrm{id}) = U$ et en déduire que $\ker(T - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

Q 16. On fixe $\beta \in \ker(T - \mathrm{id}) \backslash \{0\}$.

a) Montrer que l'application $x \mapsto \beta x$ envoie $\ker(T - \mathrm{id})$ dans $\ker(T + \mathrm{id})$. En déduire que $\beta^2 \in U$ et que $\ker(T - \mathrm{id}) = \beta U$.

b) Montrer que $\beta^2 \in]-\infty, 0[$.

c) Démontrer le théorème B.

On se propose maintenant de démontrer le résultat suivant :

Théorème C. Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre. S'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel A telle que

$$\forall x, y \in A, \ \|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|$$

alors A est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

On fixe une $\mathbb{R}$-algèbre comme dans l'énoncé du théorème ci-dessus.

Q 17. Soient $x, y \in A$ tels que $xy = yx$ et tels que $V = \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ soit de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall u, v \in V, \ \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \geqslant 4\|u\| \cdot \|v\|$$

et que la restriction de $\|\cdot\|$ à V provient d'un produit scalaire sur V.

Q 18. Montrer que $x^2 \in \mathbb{R} + \mathbb{R}x$ pour tout $x \in A$. On pourra utiliser le résultat de la précédente avec $y = 1$.

Q 19. Conclure.

Fin du sujet

IV. Automorphismes de $\mathbb{H}$ et rotations

Cette partie n'est pas à traiter durant ce devoir surveillé. Elle vous est laissée en guise de devoir à la maison facultatif.

On munit $S \times S$ de la loi de composition $\times$ donnée par $(u_1, u_2) \times (v_1, v_2) = (u_1 v_1, u_2 v_2)$ et on admet qu'elle munit $S \times S$ d'une structure de groupe. On considère l'application

$$\begin{aligned} \alpha : S \times S &\longrightarrow GL(\mathbb{H}) \\ (u, v) &\longmapsto \left(Z \mapsto u Z v^{-1}\right) \end{aligned}$$

en admettant que $\alpha(u, v)$ est bien dans $GL(\mathbb{H})$. Pour $u \in S$, on admet que l'endomorphisme $\alpha(u, u)$ de $\mathbb{H}$ laisse stable le sous-espace $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ de $\mathbb{H}$, et on note $C_u \in \operatorname{End}\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$ l'endomorphisme induit. On a donc $C_u(Z) = u Z u^{-1}$ pour $Z \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

Q 20. Montrer que α est un morphisme de groupes et décrire son noyau.

Q 21. Montrer que α est continu et que l'image de α est contenue dans $SO(\mathbb{H})$. On pourra commencer par montrer que $\alpha(u, v) \in O(\mathbb{H})$ pour $(u, v) \in S \times S$.

Q 22. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \cap S$, et soit $u = (\cos\theta) E + (\sin\theta) v$.

a) Montrer que $u \in S$ et que $u^{-1} = (\cos\theta) E - (\sin\theta) v$.

b) Soit $w \in \mathbb{H}^{\mathrm{im}} \cap S$ un vecteur orthogonal à v. Décrire la matrice de C_u dans la base orthonormée directe (v, w, vw) de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$.

Q 23. Montrer que l'application $u \mapsto C_u$ induit un morphisme surjectif de groupes $S \to SO\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$ et décrire son noyau.

Q 24.

a) En déduire que $\alpha(S \times S) = SO(\mathbb{H})$.

b) Montrer que $N := \alpha(S \times \{E\})$ est un sous-groupe de $SO(\mathbb{H})$, puis que $g n g^{-1} \in N$ pour tous $n \in N$ et $g \in SO(\mathbb{H})$ et que $\{\pm \mathrm{id}\} \subsetneq N \subsetneq SO(\mathbb{H})$.

Soit $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ l'ensemble des automorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{H}$. Un élément de $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ est donc une application $\mathbb{R}$-linéaire bijective $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ satisfaisant $f|_{\mathbb{R}_{\mathrm{H}}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\mathrm{H}}}$ et $f(uv) = f(u) f(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{H}^2$.

Q 25. Montrer que $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{H})$, contenant $\alpha(u, u)$ pour tout $u \in S$.

Q 26. Montrer que $(f(I), f(J), f(K))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ pour tout $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{H})$.

Q 27.

a) Montrer que l'application de restriction à $\mathbb{H}^{\mathrm{im}}$ induit un isomorphisme de groupes

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) \simeq SO\left(\mathbb{H}^{\mathrm{im}}\right)$$

b) Montrer que

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = \{\alpha(u, u) \ / \ u \in S\}$$