Problème 1 - Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents - Mines-Ponts 2020 MP

Dans tout le sujet on considère des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$.

L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathscr{N}(E)$. Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathscr{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathscr{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Enfin, comme de coutume, on ne note pas les symboles $\circ$ dans les composées d'endomorphismes : uv signifie implicitement $u \circ v$.

L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathscr{L}(E)$.
Alors $\dim \mathcal{V} \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim \mathcal{V} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres.

La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents.

Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien.

Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (**lemme A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (**lemme B**).

Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

Il est admis (démonstration ultérieure en cours) que la trace d'un endomorphisme nilpotent est nulle et que son nilindice est inférieure ou égal à n.

Q 1. Soit $u \in \mathscr{N}(E)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(u^k) = 0$

Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E - \{0\}$ sont tels que $u(x) = \lambda x$, alors $\lambda = 0$ (*indication : calculer* $u^k(x)$).

Q 2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $T_{n,k}^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que les k premières sur-diagonales sont nulles si $k < n$ ou toutes les sur-diagonales sont nulles si $k \geqslant n$. Montrer que si $A \in T_{n,k}^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in T_{n,\ell}^{++}(\mathbb{R})$, alors $AB \in T_{n,k+\ell+1}^{++}(\mathbb{R})$.

Q 3. On fixe une base $\mathscr{B}$ de E. On note $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathscr{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Q 4. Soit $\mathscr{B}$ une base de E . Montrer que

$$\{\nu(u) \ / \ u \in \mathscr{N}_B\} = \{\nu(u) \ / \ u \in \mathscr{N}(E)\} = [\![1, n]\!]$$

Q 5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geqslant q \geqslant 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$.

Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et

si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre, alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

Q 6. Soit $u \in \mathscr{N}(E)$ de nilindice p.

Déduire de la question précédente que si $p \geqslant n-1$ et $p \geqslant 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (-|-))$.

Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera $a \otimes x$ l'application de E dans E définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

Q 7. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est lineaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathscr{L}(E) \ / \ \operatorname{Im} u \subset \operatorname{vect}(x)\}$.

Q 8. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a|x)$.

III. Deux lemmes

On considère ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathscr{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u)$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$ (cet indice est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geqslant 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \ / \ v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme B. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

Dans les questions 9 à 12, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

Q 9. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i \ f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

Q 10. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

Q 11. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire le validité du lemme A.

Q 12. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

Q 13. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

Étant donné $y \in K(\mathcal{V}))$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV. Démonstration du théorème de Gerstenhaber

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis.

On se donne donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n-1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathscr{L}(E')$ on a $\dim \mathcal{V}' \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ et si en outre $\dim \mathcal{V}' = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathscr{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(-|-)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \mathrm{vect}(x)^{\perp}, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \ / \ v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} \ / \ v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H \quad \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \ / \ u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} \ / \ \overline{u} = 0\}.$$

Q 14. Montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathscr{L}(H)$ et $\mathcal{W}$.

Q 15. Montrer que

$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

Q 16. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que

$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \ / \ a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z}.$$

et montrer qu'alors $x \in L^{\perp}$.

Q 17. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme A que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

Q 18. Justifier que $\lambda.x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leqslant n-1.$$

Q 19. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathscr{L}(H)$.

Q 20. Démontrer que

$$\dim \mathcal{V} \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Q 21. Démontrer que

$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim(L) = n.$$

et

$$L^{\perp} = \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Q 22. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte-tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^{\bullet}$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geqslant n-1$ d'après la question **Q 22**.

Q 23. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

On pourra utiliser les résultats des questions 6 et 21.

Q 24. On suppose qu'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Q 25. Conclure.

Problème 1

I.

Q 1. Soit $u \in \mathscr{N}(E)$, alors $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(u^k)^p = (u^p)^k = 0$, d'où $u^k \in \mathscr{N}(E)$ et donc $\mathrm{tr}(u^k) = 0$.

Q 2. Soit $A = (a_{i,j})_{i \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Par définition, pour $k \in \mathbb{N}$, $A \in T_{n,k}^{++}(\mathbb{R})$ si et s.si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad j \leqslant i + k \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Soit $A \in T_{n,k}^{++}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in T_{n,\ell}^{++}(\mathbb{R})$. On note $C = (c_{i,j})$ le produit de A et B.

Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} b_{p,j}$. Or dans cette somme, quand $p \leqslant i + k$, $a_{i,p} = 0$, donc la somme commence vraiment au rang $i + k + 1$. Donc $c_{i,j} = \sum_{p=i+k+1}^{n} a_{i,p} b_{p,j}$.

Si $j \leqslant k + \ell + 1 + i$, alors pour tout $p \geqslant i + k + 1$, $p \geqslant j - \ell$, *i.e.* $j \leqslant p + \ell$, donc $b_{p,j} = 0$: la somme précédente est donc nulle, donc $c_{i,j} = 0$.

Ceci prouve que $AB \in T_{n,k+\ell+1}^{++}(\mathbb{R})$.

Q 3. Il est bien connu que par choix d'une base, on définit un isomorphisme entre $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en associant à chaque endomorphisme de E sa matrice dans cette base. L'image par cet isomorphisme de $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ est $T_n^{++}(\mathbb{R})$. Or en notant $(E_{i,j})_{i \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il est évident que la famille $(E_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ est une base de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $\dim \mathscr{N}_{\mathscr{B}} = \dim T_n^{++}(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

De plus, par récurrence immédiate grâce à la question précédente, pour tout $A \in T_n^{++}(\mathbb{R}) = T_{n,0}^{++}(\mathbb{R})$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p \in T_{n,p-1}^{++}(\mathbb{R})$ donc $A^n \in T_{n,n-1}^{++}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Autrement dit, toutes les matrices A de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ sont nilpotentes, donc les éléments de $\mathscr{N}_{\mathscr{B}}$ le sont aussi.

Q 4. Le nilindice d'un endomorphisme nilpotent est toujours au moins égal à 1, puisque $u^0 = \mathrm{id}_E$, et au plus n d'après le résultat admis. Ceci prouve l'inclusion $\{\nu(u) \ / \ u \in \mathscr{N}(E)\} \subset [\![1,n]\!]$.

Réciproquement, si on choisit une matrice de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ et qu'on appelle k le plus petit entier pour lequel $A \in T_{n,k}^{++}(\mathbb{R})$, alors en reprenant les calculs menés en **Q 2**, on vérifie que le plus petit exposant p tel que $A^p = 0$ est $n - k$, donc tous les entiers compris entre 1 et n sont des nilindices.

D'où l'égalité $\{\nu(u) \ / \ u \in \mathscr{N}_B\} = \{\nu(u) \ / \ u \in \mathscr{N}(E)\} = [\![1,n]\!]$.

Q 5.

— Par l'absurde, si la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est liée, alors il existe une famille $(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$ non nulle tel que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ et considérons $j = \min\{k \in [\![0,p-1]\!] \ / \ \alpha_k \neq 0\}$, alors $\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i u^i(x) = 0$ et en appliquant $p - 1 - j$ fois la fonction u, on obtient $\alpha_j u^{p-1}(x) = 0$, ce qui est en contradiction avec $\alpha_j \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.

— On suppose de plus que $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre,

soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{q-1}$ des réels tels que $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$, alors en appliquant u^q, on obtient $\alpha_0 u^q(x) + \alpha_1 u^{q+1}(x) + \ldots + \alpha_{r-1} u^{p-1}(x) = 0$ où on a posé $r = p - q \geqslant 0$.

La liberté de la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ exige que $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0$.

On obtient donc $\sum_{i=r}^{p-1} \alpha_i u^i(x) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(y) = 0$, et en appliquant successivement $u^{q-1}, u^{q-2}, \ldots, u$, on aura successivement $\alpha_r u^{p-1}(x) + \beta_0 u^{q-1}(y) = 0, \ldots, \alpha_{p-2} u^{p-1}(x) + \beta_{q-2} u^{q-1}(y) = 0$ et la liberté de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ entrainera $(\alpha_r, \beta_0) = \ldots = (\alpha_{p-2}, \beta_{q-2}) = (0,0)$ et finalement $\alpha_{p-1} u^{p-1}(x) + \beta_{q-1} u^{q-1}(y) = 0$, donc $(\alpha_{p-1}, \beta_{q-1}) = (0,0)$.

Donc $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{q-1}$ sont tous nuls : la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.

Q 6. Soit $u \in \mathscr{N}(E)$ de nilindice $p \geqslant n - 1$.

— Si $p = n$, alors $\mathbf{B}' = (x, u(x), ..., u^{n-1})$ est une base de E et la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & & & (O) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (O) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il est clair que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(x), ..., u^{n-1}(x))$, $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{vect}(u^{n-1}(x))$ et $\mathrm{Im}(u^{n-1}) = \mathrm{vect}(u^{n-1}(x))$ et on a bien le résultat attendu.

— Si $p = n-1$, alors $(x, u(x), ..., u^{n-2}(x))$ est libre, on la complète en une base de E, $\mathbf{B}' = (x, u(x), ..., u^{n-2}(x), y)$, alors $u^{n-1}(y) = 0$ et d'après la question précédente, $(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y))$ est liée, sinon on aurait $\mathbf{B}' \cup \{y, u(y)\}$ libre avec un cardinal $\geqslant n+1$.

$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(x), ..., u^{n-2}(x), u(y))$, $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{vect}(u^{n-2}(x), y)$ et $\mathrm{Im}(u^{n-2}) = \mathrm{vect}(u^{n-2}(x), u^{n-2}(y)) = \mathrm{vect}(u^{n-2}(x))$.

Or $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$.

- Si $y \in \mathrm{Ker}(u)$, $u(y) = 0$, donc par liberté de $(u(x), ..., u^{n-2}(x), y)$, $y \notin \mathrm{Im}(u)$, donc $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{vect}(u^{n-2}(x)) = \mathrm{Im}(u^{n-2})$.

- Si $y \notin \mathrm{Ker}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{vect}(u^{n-2}(x))$.

II.

Q 7. On note $\varphi : E \longrightarrow \mathscr{L}(E)$ définie par $\forall a \in E, \varphi(a) = a \otimes x$.

La linéarité de φ est évidente, par linéarité à gauche du produit scalaire.

Soit $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $\forall z \in E \quad \varphi(a)(z) = (a|z).x = 0$, or $x \neq 0$, donc avec $z = a$, on obtient $(a|a) = \|a\|^2 = 0$, donc $a = 0$, ce qui assure l'injectivité de φ.

Pour tout $a \in E$, $\varphi(a) = a \otimes x$ est linéaire et $\mathrm{Im}(\varphi(a)) \subset \mathrm{vect}(x)$, donc $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \big\{u \in \mathscr{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\big\}$.

On complète x en une base de E, $\mathbf{B}' = (x, e_2, ..., e_n)$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)$ si et seulement si la matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,

donc $\dim \big\{u \in \mathscr{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\big\} = n = \dim(E)$,

ce qui entraîne que φ est bijective de E vers $\big\{u \in \mathscr{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\big\}$.

Q 8. $(a \otimes x)(x) = (a|x).x$, donc en choisissant la base précédente $\mathbf{B}'$, on aura $\mathrm{tr}(a \otimes x) = \mathrm{tr}\left(\underset{\mathbf{B}'}{\mathrm{mat}}(a \otimes x)\right) = a_1 = (a|x)$.

III.

Q 9. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathscr{P}(k)$ le prédicat « il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que $\forall t \in \mathbb{R} \quad (u+tv)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} t^i \ f_i^{(k)}$ ».

Pour $k = 1$, $(u+tv)^1 = u + tv = t^0 u + t^1 v$, donc $f_0^{(1)} = u, f_1^{(1)} = v$: $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(k)$ est vraie ($k \geqslant 1$), alors

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u+tv)^{k+1} = (u+tv)^k(u+tv) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}(u+tv) = \sum_{i=0}^{k} (t^i f_i^{(k)} u + t^{i+1} f_i^{(k)} v)$

$$= \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k+1} t^i f_{i-1}^{(k)} v = f_0^{(k)} u + \sum_{i=1}^{k} t^i (f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v) + t^{k+1} f_k^{(k)} v,$$

Donc en posant $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u, f_{k+1}^{(k+1)} = f_k^{(k)} v$ et pour $i \in [\![1, k]\!]$, $f_i^{(k+1)} = f_i^{(k)} u + f_{i-1}^{(k)} v$, on a l'existence de la famille $(f_i^{(k+1)})_{0 \leqslant i \leqslant k+1}$.

L'unicité est assurée par unicité des coefficients d'un polynôme : il suffit de choisir une base et de considérer les coefficients de la matrice de $(u+tv)^{k+1}$, dont chacun qui s'écrit comme un polynôme en t.

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

De plus, au passage dans la récurrence, on montre que $f_0^{(1)} = u$, et si $f_0^{(k)} = u^k$, alors $f_0^{(k+1)} = f_0^{(k)} u$, donc per récurrence évidente, pour tout k, $f_0^{(k)} = u^k$.

De même, $f_1^{(1)} = v$ et si $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$, alors $f_1^{(k+1)} = f_1^{(k)} u + f_0^{(k)} v$ et une récurrence évidente donne pour tout k, $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

Q 10. $u, v \in \mathcal{V}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V}$, donc $u + tv$ est nilpotent et par suite $(u + tv)^p = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi $t \longmapsto (u + tv)^p$ est une fonction polynômiale vectorielle nulle, donc les $f_i^{(p)}$ sont nuls, en particulier $f_1^{(p)} = 0$.

Q 11. Par linéarité de la trace,on obtient

$$\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(u^i v u^{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}(u^k v) = (k+1) \operatorname{tr}(u^k v).$$

$u + tv$ est nilpotent, donc $(u + tv)^{k+1}$ l'est aussi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui entraine que

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 = \operatorname{tr}\left((u + tv)^{k+1}\right) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \operatorname{tr}(f_i^{(k+1)})$: il s'agit d'une fonction polynômiale nulle, donc ses coefficients sont nuls, *i.e.* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{tr}(f_i^{(k+1)}) = 0$, c'est-à-dire $tr(u^k v) = 0$, ce qui valide le lemme **A**.

Q 12. $\mathcal{V}^\bullet = \left\{x \in E \;/\; \exists u \in \mathcal{V} \quad x \in \operatorname{Im}(u^{p-1})\right\}$.

Pour tout $t \neq 0$, $(u + tv)^{p-1} = f_0^{(p-1)}(t) + t f_0^{(p-1)}(t) + \sum_{k=2}^{p-1} t^k f_k^{(p-1)}$ donc

$$f_1^{(p-1)}(y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((u + tv)^{p-1}(y) - f_0^{(p-1)}(y)\right) = \lim_{t \to 0}\left((u + tv)^{p-1}\left(\frac{1}{t} y\right) - u^{(p-1)}\left(\frac{1}{t} y\right)\right).$$

En particulier, en prenant $t \leftarrow \dfrac{1}{k}$ où $k \in \mathbb{N}^*$, $f_1^{(p-1)}(y)$ est limite d'une suite à valeurs dans $K(\mathcal{V})$ qui est fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie, donc $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

$\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$, donc $\sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = -v u^{p-1}$,

et par suite $u f_1^{(p-1)} = \sum_{i=0}^{p-2} u^{i+1} v u^{p-2-i} = \sum_{i=1}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = -v u^{p-1}$, donc $u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) = -v\left(u^{p-1}(y)\right)$.

On en déduit que pour tout $x \in \operatorname{Im}(u^{p-1})$, il existe $y \in E$ tel que $x = u^{p-1}(y)$, donc $v(x) = v\left(u^{p-1}(y)\right) = -u\left(f_1^{(p-1)}(y)\right) \in u\left(K(\mathcal{V})\right)$, étant donné que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$.

Q 13. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x) + \mathcal{V}x$ et $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

D'après la question **Q 12**, pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$, c'est-à-dire $\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V}))$ (inclusion *)

— On remarque que $u(x) = 0$, donc comme $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x) + u(K(\mathcal{V}))$,

donc $u(K(\mathcal{V})) \subset u(\operatorname{vect}(x) + \mathcal{V}x)) = u(\mathcal{V}x) \subset u^2(K(\mathcal{V})$

donc $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x) + u(K(\mathcal{V})) \subset \operatorname{vect}(x) + u^2(K(\mathcal{V})) \subset \ldots \subset \operatorname{vect}(x) + u^k(K(\mathcal{V}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

— Soit $y \in K(\mathcal{V})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in K(\mathcal{V})$ tel que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.

— Pour $k = p$, $y = \lambda_p x + u^p(y_p) = \lambda_p x \in \operatorname{vect}(x)$, donc $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{vect}(x)$.

— De l'inclusion *, on tire alors $\mathcal{V}x \subset u(K(\mathcal{V})) \subset u\left(\operatorname{vect}(x)\right) \subset \{0\}$, donc $\mathcal{V}x = \{0\}$.

IV.

Q 14. On considère l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{array}$. Alors $\mathcal{V}x = \operatorname{Im}(\varphi)$, $\mathcal{W} = \operatorname{Ker}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels.

On considère l'application linéaire $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathscr{L}(H) \\ u & \longmapsto & \overline{u} \end{array}$. Alors $\overline{\mathcal{V}} = \operatorname{Im}(\psi)$, $\mathcal{Z} = \operatorname{Ker}(\psi)$ sont des sous-espaces vectoriels.

Q 15. On applique le théorème du rang aux applications φ et ψ,

on obtient $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{V}x)$ et $\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}})$,

ce qui donne l'égalité $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{Z}) + \dim(\overline{\mathcal{V}})$.

Q 16.

— $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} \ / \ \overline{u} = 0\}$, or

$\overline{u} = 0$ si et seulement si $\forall z \in H \quad \overline{u}(z) = \pi(u(z)) = 0$, si et seulement si $\forall z \in H \quad u(z) \in \mathrm{vect}(x)$ si et seulement si $u(H) \subset \mathrm{vect}(x)$.

Donc $\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} \ / \ u(H) \subset \mathrm{vect}(x)\}$, or d'après la question **Q 7**, l'application $a \longmapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E dans $\{u \in \mathscr{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{vect}(x)\}$, donc pour chaque $u \in \mathcal{W}$ tel que $u(H) \subset \mathrm{vect}(x)$, notons L le sous-espace de E image réciproque de $\mathcal{Z}$ par cette application, alors $\mathcal{Z} = \{a \otimes x \ / \ a \in L\}$, et $\mathcal{Z}$ et L sont isomorphes donc $\dim(\mathcal{Z}) = \dim(L)$.

— pour tout $a \in L$, $a \otimes x \in Z$, donc $a \otimes x$ est nilpotente et par suite grâce à la question **Q 8**, $\mathrm{tr}(a \otimes x) = (a|x) = 0$, donc $x \in L^{\perp}$.

Q 17.

— Soit $v \in \mathcal{V}$. Montrons que $v(x) \in L^{\perp}$.

Soit $a \in L$, alors pour tout $z \in E$, $(a \otimes v(x))(z) = (a|z).v(x) = v((a|z)x) = v((a \otimes x)(z)) = (v \circ (a \otimes x))(z)$, donc $a \otimes v(x) = v \circ (a \otimes x)$, en appliquant le lemme **A** avec $k = 1$, on obtient $\mathrm{tr}(v \circ (a \otimes x)) = \mathrm{tr}(a \otimes v(x)) = (a|v(x)) = 0$, donc $v(x) \in L^{\perp}$.

— $x \in L^{\perp}$, $u \in \mathcal{V}$, donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^k \in \mathcal{V}$, et vu que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, on aura $u^k(x) \in L^{\perp}$.

Q 18.

— S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $\lambda x = u(x)$, donc $\lambda \in Sp(u)$, mais u est nilpotent, donc $\lambda = 0$, ce qui contredit $\lambda \neq 0$.

— D'après les deux questions précédentes $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$ et $\mathrm{vect}(x) \subset L^{\perp}$ et $\mathrm{vect}(x)$ n'est pas inclus dans $\mathcal{V}x$, donc l'inclusion $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$ est stricte, d'où

$\dim(\mathcal{V}x) < \dim(L^{\perp})$ et par suite $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) < \dim(L^{\perp}) + \dim(L) = n$,

c'est-à-dire $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) \leqslant n - 1$.

Q 19.

— On pose $\mathscr{P}(k)$ le prédicat « pour $z \in H$, $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ ».

π est la projection orthogonal sur H, donc pour tout $z \in H$, $\pi(z) = z$ donc $\overline{u}^0(z) = z = \pi(u^0(z))$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(k)$ est vraie, alors on fait la remarque suivante :

tout $z \in E$ se décompose par $z = \alpha x + y$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y \in H$, alors pour tout $u \in \mathcal{W}$, $u(x) = 0$, donc $u(z) = u(y)$ et $\pi(z) = y$ et par suite $u(\pi(z)) = u(y) = u(z)$.

Alors pour tout $z \in H$, $\overline{u}^{k+1}(z) = \overline{u}(\overline{u}^k(z)) = \overline{u}(\pi(u^k(z))) = \overline{u}(u^k(z)) = \pi(u(u^k(z))) = \pi(u^{k+1}(z))$, ce qui prouve que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

— Soit $u \in \mathcal{W}$, u étant nilpotent, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$, donc $\overline{u}^k = \pi \circ u^k = 0$, donc $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent.

Q 20. $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace de $\mathscr{L}(H)$ nilpotent et $\dim(H) = n - 1$, donc par hypothèse de récurrence,

$\dim(\overline{\mathcal{V}}) \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, donc avec l'égalité de la question**Q 15** et l'inégalité de la question **Q 18**, on obtient

$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) + \dim(\overline{\mathcal{V}}) \leqslant n - 1 + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Q 21.

— De l'inégalité de la question **Q 18** et l'égalité de la question **Q 15**, on tire $\dim(\overline{\mathcal{V}}) \geqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, or par hypothèse de récurrence $\dim(\overline{\mathcal{V}}) \leqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, donc $\dim(\overline{\mathcal{V}}) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

— Avec ces résultats, l'égalité de la question **Q 15** entraine que, $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n - 1$, donc

$\dim(\mathrm{vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n$.

— On a les inclusions entre sous-espaces, $\mathrm{vect}(x) \subset L^{\perp}$ et $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, donc $\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, de plus on a égalité de dimensions, donc $\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x = L^{\perp}$.

— D'après la question **Q 17**, pour tout $v \in \mathcal{V}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(x) \in L^{\perp}$, donc $v^k(x) \in \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Q 22.

— d'après la question **Q 19**, $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathscr{L}(H)$ de dimension $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ et $\dim(H) = n-1$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathbf{B}'$ de H tel que pour tout $v \in \mathcal{W}$, $\underset{\mathbf{B}'}{\mathrm{mat}}(\overline{v})$ est triangulaire supérieure stricte. Soit $v \in \mathscr{L}(H)$ de matrice dans la base $\mathbf{B}'$ de taille $n-1$, est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (O) \\ & 0 & \ddots & \\ & (O) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, alors

$v^{n-2} \neq 0$.

— Considérons $u \in \mathcal{V}$ dont la restriction à H est égal à v, alors $u^{n-2} \neq 0$, donc le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égale à $n-1$.

— Si $\mathcal{V}x = \{0\}$, alors pour tout $v \in \mathcal{V}$, $v(x) = 0$.

On considère la base de E, $\mathbf{B} = \mathbf{B}' \cup \{x\}$, alors tout élément $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Q 23.

— Si $v^{p-1} = 0$, alors $\mathrm{Im}(v^{p-1}) = \{0\} \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

— Si $v^{p-1} \neq 0$, alors le nilindice de v est $p \geqslant n-1$, donc d'après la question 5, $\mathrm{Im}(v^{p-1}) = \mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}(v)$ et $\dim \mathrm{Im}(v^{p-1}) = 1$.

$v(x) \neq 0$, considérons $j = \max \left\{k \in [\![1, p-1]\!] \;/\; v^k(x) \neq 0\right\}$.

Alors $v^{j+1}(x) = 0$, donc $v^j(x) \in \mathrm{Im}(v) \cap \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(v^{p-1})$ et par suite $\mathrm{Im}(v^{p-1}) = \mathrm{vect}(v^j(x))$, et par la question **Q 21**, $v^j(x) \in \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $\mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Q 24. $v_0(x) \neq 0$, donc $\exists j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\pi_j(v_0(x)) = (v_0(x))_j \neq 0$ où π_j la j-ième projection qui envoie la j-ième composante d'un vecteur de E dans une base fixée.

Soit $z \in E$. Considérons une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ nulle sur $\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, et la fonction polynômiale

$P : t \longmapsto \pi_j\left((v + tv_0)(x)\right).\varphi\left((v+tv_0)^{p-1}(z)\right)$ de degré $\leqslant p$.

D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$,

$\forall z \in E$, $(v + tv_0)^{p-1}(z) \in \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $(v + tv_0)(x) \neq 0$, donc P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

Or $\pi_j(v_0(x)) \neq 0$, donc $t \longmapsto \pi_j\left((v + tv_0)(x)\right)$ est non nul, ce qui exige pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi\left((v + tv_0)^{p-1}(z)\right) = 0$, en particulier pour $t = 0$, $\varphi\left(v^{p-1}(z)\right) = 0$, ceci pour toute forme φ nulle sur $\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, en particulier pour les projections qui envoient un vecteur sur les composantes dans $(\mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)^{\perp}$, on obtient $v^{p-1}(z) \in \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraine que $\mathrm{Im}(u^{p-1}) \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

Q 25. On vient de montrer que pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc $\displaystyle\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \mathrm{Im}(v^{p-1}) \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ et par suite $K(\mathcal{V}) = \mathrm{vect}\left(\displaystyle\bigcup_{v \in \mathcal{V}} \mathrm{Im}(v^{p-1})\right) \subset \mathrm{vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, ce qui entraine par le lemme **B**, que $\mathcal{V}x = \{0\}$ et par la question 21, il existe une base de E dans laquelle tout $v \in \mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire stricte.