Mpi - Programme de colles 4

Semaine du 7 au 12 octobre 2024

1 Espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Reprise du programme précédent : normes, parties bornées, suites, limites et continuité, continuité des applications linéaires, norme subordonnée.
b) Intérieur d'une partie. Voisinages d'un point.
c) Parties ouvertes ou fermées d'un e.v.n., diverses propriétés usuelles et caractérisations. Extension aux ouvertes ou fermés relatifs. Caractérisation des fonctions continues par les images réciproques d'ouverts ou de fermés.
d) Valeurs d'adhérence d'une suite. En dimension finie, th. de Bolzano-Weierstrass. Parties compactes d'un e.v.n. (définition séquentielle uniquement), propriétés, caractérisation des compacts en dimension finie. Un s.e.v. de dimension finie est toujours fermé. Théorème des bornes atteintes, image continue d'un compact.
e) Parties connexes par arc, composantes connexes par arc, exemples classiques (parties convexes ou étoilées). Théorème des valeurs intermédiaires, image continue d'un connexe par arc.

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ (en fait n'importe quel corps).

2 Algèbre linéaire : révisions de Première Année

a) Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Familles libres, liées, génératrices. Bases.
b) Sommes de deux sous-espaces, sommes directes, sous-espaces supplémentaires.
c) Dimension d'un e.v., dimension d'un s.e.v., rang d'une famille de vecteurs. Th. de la base incomplète, caractérisation des bases.
d) Applications linéaires, noyau, image. Opérations sur les applications linéaires, algèbre $\mathscr{L}(E)$.
e) Applications linéaires en dimension finie, matrice dans un couple de bases, cas des endomorphismes. Th. du rang et applications. Caractérisation des automorphismes en dimension finie.
f) Opérations sur les matrices, algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Rang d'une matrice, matrices équivalentes. Matrices semblables. Trace. Caractérisation des matrices inversibles, calcul de l'inverse par l'algorithme de Gauss-Jordan.
g) Formes linéaires. En dimension finie, systèmes d'équations d'un s.e.v.
h) Déterminants.

3 Compléments

a) Sommes de plusieurs s.e.v., sommes directes, sous-espaces supplémentaires.
b) Polynômes annulateurs d'une matrice ou d'un endomorphisme en dimension finie, idéal annulateur, polynôme minimal. Applications : calcul de l'inverse, calcul des puissances.
c) Calculs par blocs, diverses définitions et propriétés.