**ALGÈBRE LINÉAIRE : RÉVISIONS ET COMPLÉMENTS**

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

**+**1)** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille libre de $E$.

a) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $c_i = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} u_k$. Montrez que la famille $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

b) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ : on pose $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = s + u_i$. Montrez que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée si et seulement si $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ : on pose $s = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = s + \lambda\, u_i$. Montrez qu'il existe exactement deux valeurs de $\lambda$ pour lesquelles la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée.

**+**2)** Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

**+**3)** Soit $f$ une application d'un ensemble $\Omega$ dans $\mathbb{C}$ qui prend une infinité de valeurs.

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, f, f^2, \ldots, f^n)$ est libre dans l'espace $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{C})$.

**+**4)** Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $P_k = (X + k)^n$. Montrez que la famille $\mathscr{F}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

***5)** Soit $a \in \mathbb{C}^*$. $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}-$e.v. Soit $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à $z$ associe $z + a\overline{z}$.

a) Montrez que $f$ est linéaire.

b) Montrez que si $|a| \neq 1$, alors $f$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$.

c) Déterminez le noyau et l'image de $f$ dans le cas où $a = e^{i\alpha}$ (on pourra utiliser l'écriture trigonométrique des complexes).

**+*6)** Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui conserve le degré : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg f(P) = \deg P$.

Montrez que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (on pourra étudier les restrictions de $f$ à $\mathbb{K}_n[X]$).

**+**7)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

a) Montrez que $f$ est un endomorphisme de $K_n[X]$.

b) Montrez que si $P \in \operatorname{Ker} f$, alors $X^2 - 1$ divise $P$, puis justifiez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = (X^2 - 1)^\alpha Q$ et ($Q(1) \neq 0$ ou $Q(-1) \neq 0$).

c) Montrez que si $n$ est impair, alors $f$ est un automorphisme.

d) Montrez que si $n$ est pair, alors $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle. Déduisez-en la dimension de $\operatorname{Im} f$.

****8)** On pose $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$, on pose $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2XP(X)$.

a) Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$.

b) Déterminez $\operatorname{Ker} f$.

c) Montrez que $\operatorname{Im} f = \{Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ Q'(1) = Q(1) \text{ et } Q'(-1) = -Q(-1)\}$. Indication : restreindre à $\mathbb{C}_n[X]$.

***9)** Soient $E, F, G$ trois $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$.

Montrez que $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$

**+**10)** Soit $E, F, G$ 3 $\mathbb{K}-$e.v, $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$.

a) Montrez que $\operatorname{Ker} g \circ f = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

b) Montrez que $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g \iff \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

*****11)** Soit $E, F$ deux $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On dit que $g \in \mathscr{L}(F, E)$ est un inverse à droite de $f$ quand $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

a) Montrez que si $f$ possède deux inverses à droite différents, alors $f$ en possède une infinité.

b) Montrez que si $f$ possède un unique inverse à droite, alors $f$ est un isomorphisme (vous admettrez l'existence d'un supplémentaire de tout s.e.v.)

+**12) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, $(f,g)\in\mathscr{L}(E)^2$ tel que $f^2\circ g=f$ et $\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} g$.

a) Montrez que $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} g$.

b) Montrez que $E=\operatorname{Ker} g\oplus\operatorname{Im} g$.

c) Montrez que $g^2\circ f=g$.

+**13) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$.

a) Montrez que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0$

b) Dans ce cas, montrez alors que : $\operatorname{Im}(p+q)=\operatorname{Im}(p)\oplus\operatorname{Im}(q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q)=\operatorname{Ker}(p)\cap\operatorname{Ker}(q)$.

**14) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v., $p,q$ deux projecteurs de $E$ tels que $p\circ q=0$. Soit $r=p+q-q\circ p$.

Montrez que $r$ est un projecteur et précisez ses éléments caractéristiques.

**15) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. On suppose qu'il existe $(f,g)\in\mathscr{L}(E)^2$ tel que $f\circ g-g\circ f=\mathrm{Id}_E$.

a) Démontrez que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a $f\circ g^n-g^n\circ f=ng^{n-1}$.

b) Déduisez-en que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, la famille $(g^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre dans $L(E)$.

c) Si $E$ est de dimension finie $p\geqslant 1$, que pouvez-vous conclure ?

**16) Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^3=\mathrm{Id}_E$. Pour $a\in\mathbb{R}$ et $u\in E$, on veut résoudre l'équation $x+af(x)=u$ d'inconnue $x\in E$.

a) Montrez que pour toutes les valeurs de $a$, sauf une seule $a_0$, l'équation a une unique solution que vous calculerez.

b) Dans le cas où $a=a_0$, donnez une condition nécessaire sur $u$ pour qu'il existe une solution, puis si cette condition est satisfaite, déterminez une solution particulière de l'équation qui soit combinaison linéaire de $u$ et $f(u)$. Concluez.

+**17) Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f\in\mathscr{L}(E)$.

a) Montrez que $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} f$ si et s.si $n$ est pair, $\operatorname{rg} f=\dfrac{n}{2}$ et $f^2=0$.

b) Donnez un exemple d'une telle application linéaire $f$.

c) Si les conditions de la question a sont satisfaites, alors on pose $r=n/2$ : montrez qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est $\begin{pmatrix}0&0\\I_r&0\end{pmatrix}$ (matrice par blocs).

+**18) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $f\in L(E)$, montrez l'équivalence

$$E=\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f\iff\operatorname{Ker} f^2=\operatorname{Ker} f\iff\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$$

*19) Soit $E,F$ deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies et $(f,g)\in\mathscr{L}(E,F)^2$. Montrez que $|\operatorname{rg}(f)-\operatorname{rg}(g)|\leqslant\operatorname{rg}(f+g)\leqslant\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g)$.

**20) Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $(u,v)\in\mathscr{L}(E)^2$. On suppose que $u\circ v=0$ et $u+v\in GL(E)$. Démontrez que $\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)=\dim(E)$.

**21) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $(f,g)\in\mathscr{L}(E)^2$.

a) Montrez que s'il existe $\varphi\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f=g\circ\varphi$, alors $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Im} g$.

b) Montrez que la réciproque est vraie.

**22) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $(f,g)\in\mathscr{L}(E)^2$.

a) Montrez que s'il existe $\varphi\in\mathscr{L}(E)$ tel que $f=\varphi\circ g$, alors $\operatorname{Ker} g\subset\operatorname{Ker} f$.

b) Montrez que la réciproque est vraie.

**23) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

a) Soit $U$ un s.e.v. de $E$. On pose $\mathscr{A}=\{u\in\mathscr{L}(E)\ /\ U\subset\operatorname{Ker} u\}$.

Montrez que $\mathscr{A}$ est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$ tel que $\forall(f,u)\in\mathscr{L}(E)\times\mathscr{A}\quad f\circ u\in\mathscr{A}$ et calculez sa dimension.

b) Montrez que la réciproque est vraie : si $\mathscr{A}$ est un s.e.v. de $\mathscr{L}(E)$ tel que $\forall(f,u)\in\mathscr{L}(E)\times\mathscr{A}\quad f\circ u\in\mathscr{A}$, alors il existe $U$ s.e.v. de $E$ tel que $\mathscr{A}=\{u\in\mathscr{L}(E)\ /\ U\subset\operatorname{Ker} u\}$.

+*24) Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrez que $A$ peut s'écrire comme le produit d'une matrice colonne par une matrice ligne. Déduisez-en que $A^2=\operatorname{tr}(A).A$.

+**25) Soit $f$ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(AB)=f(BA)$. Montrez que $f$ est proportionnelle à la trace (indication : faire intervenir la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

*****26)** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $G$ un sous-groupe de cardinal $n$ de $GL(E)$.

On pose $F = \{x \in E \ / \ \forall g \in G \ g(x) = x\}$. Montrez que $\dim F = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} \operatorname{tr}(g)$. Indication : on pourra utiliser $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$.

***27)** Montrez qu'il n'existe pas de couples de matrices $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = I_n$.

**+*28)** Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$. On suppose que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$. Montrez que $A = B$.

***29)** Soit $u, v$ les deux suites réelles telles que $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -3u_n + 10v_n$ et $v_{n+1} = -3u_n + 8v_n$.

Donnez des expressions de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

****30)** Soit $u, v, w$ les trois suites réelles telles que $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}w_n \\ v_{n+1} & = & 5u_n - \frac{5}{2}v_n + 2w_n \\ w_{n+1} & = & 4u_n - \frac{5}{2}v_n + 2w_n \end{array}\right.$

Donnez des expressions de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$ et leurs limites quand $n$ tend vers $+\infty$.

**+**31)** Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On suppose connaître $P$ un polynôme annulateur de $A$, $Q$ un polynôme annulateur de $B$.

On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

a) Montrez que $PQ$ est un polynôme annulateur de $M$ dans le cas où $C = 0$.
b) Montrez que ce résultat reste vrai même si $C$ n'est pas nulle. Indication : penser à un produit par blocs.

**+**32)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P$ un polynôme annulateur de $A$. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice $B^k$ en distinguant les cas $k$ pair et $k$ impair.
b) On pose $Q(X) = P(X^2)$. Montrez que $Q$ est un polynôme annulateur de $B$.

**+**33)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P$ un polynôme annulateur de $A$. On définit $B \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{K})$ par blocs : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

a) Calculez pour $k \in \mathbb{N}$ la matrice $B^k$.
b) Déterminez un polynôme annulateur de $B$.

**+**34)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{K}_n[X]$. On pose $d : P \mapsto P'$, endomorphisme de $E$, puis $f : P \mapsto P + P'$.
a) Donnez un polynôme annulateur de $d$. Déduisez-en un polynôme annulateur de $f$.
b) Montrez que $f$ est un automorphisme, puis exprimez son inverse à l'aide de $f$.
c) Vérifiez que $f^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k d^k$.

**+**35)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $f(M) = M + \operatorname{tr}(M)A$.
a) Montrez que $f$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Déterminez un polynôme annulateur de $f$ de degré 2.
c) Dans quels cas $f$ est-il un automorphisme ? Calculez $f^{-1}$ quand on peut.
d) Dans le cas contraire, vérifiez que $f$ est un projecteur et déterminez ses éléments caractéristiques.

**+**36)** Soient $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f$ possède un polynôme annulateur $P$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$.

**Oraux de concours**

**1) CCINP** Soit $E$ un e.v. de dimension finie, $p, q$ deux endomorphismes de $E$. On suppose que $p + q = \operatorname{Id}_E$ et $\operatorname{rg} p + \operatorname{rg} q \leqslant \dim E$. Montrez que $p$ et $q$ sont deux projecteurs.

**2) IMT** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $\geqslant 2$, $f, g$ deux endomorphismes de $E$ tels que $f \circ g \circ f = f$.

a) Montrez que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs.

b) Que peut-on dire des rangs de $f$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ?

c) Montrez que $f \circ g$ est un projecteur sur $\operatorname{Im} f$, parallèlement à un sous-espace contenant $\operatorname{Ker} g$.

d) On suppose désormais qu'on a aussi $g \circ f \circ g = g$. Que dire des rangs de $f$ et $g$ ?

e) Montrez que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} g$.

**3) TPE** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$.

b) Montrez que s'il existe un entier $p$ tel que $\operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} f^{p+k} \subset \operatorname{Im} f^p$.

c) Déduisez-en que $\operatorname{Im} f^{n+1} = \operatorname{Im} f^n$.

**4) TPE** Montrez que $P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et donnez son endomorphisme réciproque.

**5) CEN** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie non nulle, $u, v$ deux endomoprhismes de $E$.

a) Montrez que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant rg(u) + \operatorname{rg}(v)$.

b) Soit $F$ un sous-espace de $E$, $G$, $H$ deux supplémentaires de $F$ dans $E$. On pose $p$ le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$ et $q$ celui sur $H$ parallèlement à $F$. Montrez que $\operatorname{rg}(p+q) = \operatorname{rg}(p) + \operatorname{rg}(q)$.

**6) CEN** Soit $E$ un $K$-e.v. de dimension finie. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une famille libre de $E^*$ (note : $E^*$ est le $K$-e.v. des formes linéaires sur $E$) et $\psi \in E^*$.

a) Montrez que $\psi \in \operatorname{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ si et s.si $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} \varphi_i \subset \operatorname{Ker} \psi$.

b) On suppose que $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Montrez que les conditions de la question précédentes sont encore équivalentes à l'existence d'un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in E \quad |\psi(x)| \leqslant M \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\varphi_i(x)|$.

**7) CCMP** Soit $n, k$ deux entiers tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. On pose $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}^{(k)} = 1$ si $i - j = k - 1$, les autres coefficients étant nuls.

a) Calculez $A_k^\top . A_k$.

Soit $p$ un projecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $p \neq \operatorname{Id}$.

b) Justifiez que $\operatorname{rg} p < n$.

c) Montrez que $p$ est la composée de deux endomorphismes nilpotents.

**8) CCMP** Soit $E$ un $K$-e.v. de dimension finie, $f, g$ deux endomorphismes de $E$. On suppose $f$ inversible et $g$ de rang 1. Montrez que $f + g$ est inversible si et s.si $\operatorname{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

**9) CCMP** Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Montrez que $p + \operatorname{rg}(I_n + AB) = n + \operatorname{rg}(I_p + BA)$.

**10) CCMP** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AMB = 0\}$. Montrez que $E$ est un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donnez sa dimension.

**11) CCMP** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvez dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $M = \operatorname{com}(M)$.