Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Sommes de sous-espaces vectoriels

1.1 Généralités

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On appelle somme de $F_1, \dots, F_n$ l'ensemble noté $F_1 + \dots + F_n$:

$$F_1 + \dots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \;/\; (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n \right\}$$

Proposition 1. *Soit* $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ *des vecteurs de* E.
Alors $\mathrm{vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n) = \mathrm{vect}(u_1, \dots, u_p) + \mathrm{vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$.

Proposition 2. *Avec les mêmes notations :* $F_1 + \dots + F_n$ *est un sous-espace vectoriel de* E.
De plus, c'est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $F_1, \dots, F_n$.
Si on connaît des familles génératrices de chacun des s.e.v. $F_1, \dots, F_n$, *alors en réunissant ces familles, on obtient une famille génératrice de* $F_1 + \dots + F_n$.

Conséquence : en fractionnant une famille génératrice de E en sous-familles, on décompose l'espace E en une somme de s.e.v.

1.2 Sommes directes

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que la somme $F_1 + \dots + F_n$ est directe quand tout vecteur de $F_1 + \dots + F_n$ a une unique écriture $\sum_{i=1}^{n} x_i$ où $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$.

On dit aussi que les sous-espaces sont en somme directe. Dans ce cas, quand on veut insister sur cette propriété, on note la somme sous la forme $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$

Proposition 3. *Avec les mêmes hypothèses.*
La somme $F_1 + \dots + F_n$ *est directe si et seulement si le vecteur nul a une unique décomposition* $\sum_{i=1}^{n} x_i$ *où* $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$, *qui est la décomposition triviale.*
Autrement dit, la somme $F_1 + \dots + F_n$ *est directe si et seulement la seule solution de l'équation* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ *d'inconnue* $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ *est le* n*-uplet nul.*

Un exemple fondamental : si $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre, alors les droites vectorielles $\mathrm{vect}(v_i)$ sont en somme directe.

Proposition 4. *Avec les mêmes hypothèses.*
Si la somme $F_1 + \dots + F_n$ *est directe, alors en concaténant des familles libres de chacun des s.e.v., on obtient une famille libre.*

1.3 Sous-espaces supplémentaires

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.

On dit que les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires (dans E) quand $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$

On déduit des deux parties précédentes le résultat sur la décomposition d'un vecteur.

Proposition 5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E.*
Il y a équivalence entre :

- ▷ *les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires*
- ▷ *tout vecteur de E peut s'écrire de manière unique comme somme de vecteurs des s.e.v. $F_1, \ldots, F_n$:*

$$\forall v \in E \quad \exists!(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n \quad v = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

Dans ce cas, soit v un vecteur de E. Il existe un unique n-uplet $(v_1, \ldots, v_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n$ tel que $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i$.

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on définit $p_j : E \to E$ en posant $p_j(v) = v_j$.
Alors les applications p_j sont des projecteurs qui vérifient les propriétés :

— $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{Id}_E$
— pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$

où $\delta_{x,y}$ est appelé symbole de Kronecker : si $x \neq y$, $\delta_{x,y} = 0$ et $\delta_{x,x} = 1$

La réciproque est vraie : si $(p_1, \ldots, p_n)$ sont n projecteurs vérifiant les deux propriétés précédentes, alors les sous-espaces $(\mathrm{Im}\, p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont supplémentaires.

Exercices **:**

1) Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, on pose $E_k = \{f \in E \;/\; \forall x \in \mathbb{C} \; f(jx) = j^k f(x)\}$.
   Montrez que E_0, E_1, E_2 sont trois s.e.v. supplémentaires de E .

Proposition 6. *Avec les mêmes hypothèses.*
Si les sous-espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires, alors en concaténant des bases de chacun des s.e.v., on obtient une base de E.

1.4 Cas particulier de deux sous-espaces

Proposition 7. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F, G deux sous-espaces vectoriels de E.*
La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Attention ! Il ne faut pas généraliser à trois ou plus sous-espaces. Même si $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ est le sous-espace nul, on ne peut pas conclure que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est directe.

1.5 Applications linéaires et sommes directes

Proposition 8. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E_1, \ldots, E_n$ des s.e.v. supplémentaires dans E, $f_1, \ldots, f_n$ des applications linéaires de $E_1, \ldots, E_n$ dans F respectivement.*
Alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f|_{E_i} = f_i$.

Autrement dit, pour définir une application linéaire sur une somme directe de sous-espaces vectoriels, il suffit de la définir sur chacun des sous-espaces vectoriels.

Exercices :

2) Soit $E_1, \dots, E_n$ des s.e.v. supplémentaires. Quelles sont les applications qui induisent l'application identité sur un des E_i et l'application nulle sur les autres E_j ?

2 Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

2.1 Base adaptée à un sous-espace

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, F un s.e.v. de E de dimension p.

On appelle base de E adaptée à F toute base de E qui contient une base de F. Quitte à changer l'ordre des vecteurs, on peut supposer dans une base adaptée à F que les p premiers vecteurs de la base forment une base de F.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de s.e.v. supplémentaires.

On appelle base adaptée à la somme $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ la concaténation de bases de chacun des s.e.v. $F_1, \dots, F_n$ (dans cet ordre).

Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors en fractionnant la base en sous-familles, les s.e.v. engendrés par chacune de ces sous-familles sont supplémentaires et la base est alors adaptée à la somme des s.e.v.

2.2 Sommes directes et bases

On donne un moyen simple de vérifier qu'une somme est directe, voire plus.

Proposition 9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(F_1, \dots, F_n)$ une famille de s.e.v. de E.*

Si en concaténant des bases de chacun des s.e.v. $F_1, \dots, F_n$, on obtient une famille libre, alors les s.e.v. sont en somme directe.

Si en concaténant des bases de chacun des s.e.v. $F_1, \dots, F_n$, on obtient une base de E, alors les s.e.v. sont supplémentaires.

2.3 Dimension d'une somme de s.e.v.

Proposition 10. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v. de E.*

Alors $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Il y a égalité quand la somme est directe.

Théorème 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v. de E.*

Alors $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe si et s.si $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

2.4 Sous-espaces supplémentaires

En dimension finie, on a une façon plus simple de prouver que des s.e.v. sont supplémentaires.

Proposition 11 (3 pour le prix de 2)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v. de E.*

Quand deux propriétés parmi les trois suivantes sont vraies, alors la troisième l'est aussi :

— $E = \sum_{i=1}^{n} F_i$

— $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$

— $\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i$

Donc dans ce cas, les s.e.v. $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires.

En pratique, le cas le plus utile est le suivant :
si $\dim \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i = \dim E$, alors les s.e.v. $F_1, \ldots, F_n$ sont supplémentaires.

Exercices :

3) Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \text{vect}(\,(-1,0,1,1)\,)$, $G = \text{vect}(\,(2,-1,1,0)\,)$ et
$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+z+t=0 \ \text{ et } \ x-y-z+t=0\}$. F, G, H sont-ils supplémentaires ?

2.5 Dimension d'une somme de deux s.e.v.

Rappel : le théorème de Grassmann.

Proposition 12. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux s.e.v. de E.*
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

3 Polynômes d'endomorphismes et de matrices

3.1 $\mathbb{K}$-algèbres

a) Définition

Définition. Un ensemble A est appelé $\mathbb{K}$-algèbre quand A est à la fois un anneau et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont les multiplications sont compatibles.

Il y a donc trois lois dans une $\mathbb{K}$-algèbre :

— une addition classique $+$;

— une multiplication externe $\mathbb{K}.$;

— une multiplication interne, compatible avec la précédente :

$$\forall(\lambda,a,b) \in \mathbb{K} \times A^2 \quad \lambda.(ab) = (\lambda.a)b = a(\lambda.b).$$

On qualifie les $\mathbb{K}$-algèbres par du vocabulaire des anneaux (algèbres intègres, algèbres principales, etc) ou des espaces vectoriels (algèbres de dimension finie, etc).

Exemples.

— $\mathbb{K}$ lui-même est une $\mathbb{K}$-algèbre, où les deux multiplications sont confondues ; $\mathbb{C}$ est aussi une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 2.

— $\mathbb{K}[X]$ est une $\mathbb{K}$-algèbre intégre et commutative et de dimension infinie.

— Si I est un intervalle, $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative non intègre et de dimension infinie.

— Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2, qui n'est ni intègre, ni commutative.

— Si E est un $\mathbb{K}$-e.v., alors $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre qui n'est ni intègre, ni commutative, de dimension finie si et s.si E l'est aussi.

b) Polynômes d'éléments dans une K-algèbre

Proposition 13. *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in A$.*

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$, on pose $P(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i a^i$.

L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$ *est alors un morphisme d'algèbres :*

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{array}{l} (P+Q)(a) = P(a) + Q(a) \\ (P.Q)(a) = P(a).Q(a) \\ (\lambda P)(a) = \lambda P(a) \end{array}$$

De plus, on note $K[a]$ l'ensemble $\{P(a) \;/\; P \in \mathbb{K}[X]\}$: cet ensemble est stable par $+$, . et $\mathbb{K}$., on dit que c'est une sous-algèbre de A.

3.2 Cas particulier des algèbres $\mathscr{L}(E)$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

E étant un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. De même, n étant un entier naturel non nul, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Dans ces algèbres, on définit naturellement la notion de polynôme d'endomorphisme ou de matrice. Bien sûr, ces notions sont liées par choix d'une base de l'espace.

Proposition 14. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{mat}}\, f = A$.*

Alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ a pour matrice $P(A)$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque.
— La « multiplication » dans $\mathscr{L}(E)$ est la composition $\circ$. Donc la dernière propriété de la proposition 13 doit être comprise comme suit : si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $(P.Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
— Même si les multiplications dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathscr{L}(E)$ ne sont pas commutatives en général, on peut néanmoins intervertir l'ordre des polynômes, car la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ est commutative :
si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(PQ)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$; si $u \in \mathscr{L}(E)$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
— Attention aux notations !
Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors l'application de $P(f)$ au vecteur x se note $P(f)(x)$ et non pas $P(f(x))$, notation qui n'a aucun sens.

3.3 Polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme annulateur de A tout polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle polynôme annulateur de u tout polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Remarque. Attention à ne pas confondre les notions : si P est un polynôme annulateur de la matrice A (on dit aussi que P annule A par abus de langage), on ne dit pas que A est une racine de P !

Une racine d'un polynôme est un nombre...

De même si $P(u) = 0$, on ne dit pas que u est une racine de P, ça n'a aucun sens.

Définition. Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'ensemble $\mathrm{Ann}(A) = \{P \in \mathbb{K}[X] \;/\; P(A) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de A.

Si u est un endomorphisme d'un e.v. E, alors l'ensemble $\mathrm{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \;/\; P(u) = 0\}$ est appelé idéal annulateur de u.

Théorème 2. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Ann}(A)$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$ stable par $\times$. De plus, il existe un unique polynôme μ_A unitaire tel que $\mathrm{Ann}(A) = \mu_A.\mathbb{K}[X]$.*

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. ***de dimension finie****, $u \in \mathscr{L}(E)$. $\mathrm{Ann}(u)$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$ stable par $\times$. De plus, il existe un unique polynôme μ_u unitaire tel que $\mathrm{Ann}(u) = \mu_u.\mathbb{K}[X]$.*

Remarque. Ce dernier résultat est faux en dimension infini. Contre-exemple : l'endomorphisme $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ défini par $u(P) = XP$.

Définition. On appelle polynôme minimal d'une matrice carrée A le polynôme μ_A précédent (noté aussi parfois π_A). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule A.

On appelle polynôme minimal d'un endomorphisme u en dimension finie e polynôme μ_u précédent (noté aussi parfois π_u). C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule u.

Autrement dit, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(u) = 0 \quad \iff \quad \mu_u \mid P$$

De même, on a l'équivalence : pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P(A) = 0 \quad \iff \quad \mu_A \mid P$$

Les polynômes annulateurs sont donc les multiples des polynômes minimaux.

On verra plus tard qu'on peut trouver des polynômes annulateurs de plus petits degrés que ceux donnés par le th. précédent.

En général, il est souvent pénible de calculer le polynôme minimal. En pratique, on se contente de trouver des polynômes annulateurs de degré pas trop grands (et souvent, il s'agit du polynôme minimal).

Remarque. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}'$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{K}$ (on dit que $\mathbb{K}'$ est une extension de $\mathbb{K}$), alors le polynôme minimal de A, vue comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}')$, est a priori différent de celui de A vue comme matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut seulement affirmer pour l'instant que $\mu_{A,\mathbb{K}'}$ divise $\mu_{A,\mathbb{K}}$.

En fait, on montre ci-dessous que le polynôme minimal ne dépend pas du corps $\mathbb{K}$.

3.4 Utilisation pratique d'un polynôme annulateur

a) Calcul de l'inverse

Proposition 15. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Alors A est inversible si et s.si A possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P : $P(0) \neq 0$.

Dans ce cas, A^{-1} est un polynôme en A.

De même, soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de , $f \in \mathscr{L}(E)$.

Alors si f possède un polynôme annulateur P tel que 0 ne soit pas racine de P : $P(0) \neq 0$, alors f est un automorphisme de E. La réciproque est vraie si E est de dimension finie.

Dans ce cas, f^{-1} est un polynôme en f.

***Exercices* :**

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminez un polynôme annulateur de A, montrez que A est inversible et calculez A^{-1}.

5) Soit p un projecteur. Déterminez un polynôme annulateur de p.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $f = p - \lambda I$. Déterminez un polynôme annulateur de f et vérifiez que f est un automorphisme pour presque toutes les valeurs de λ, dans ce cas calculez son inverse.

b) Calcul de puissances

Proposition 16. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On choisit un polynôme annulateur P de la matrice A.*

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = R_p(A)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P.

De même, soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E)$ qui possède un polynôme annulateur P.

Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p = R_p(f)$ où R_p est le reste de la division euclidienne de X^p par P.

Conséquence :

— si A possède un polynôme annulateur de degré a, alors $K[A] = \{P(A) \ / \ P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$;

— si f possède un polynôme annulateur de degré a, alors $K[f] = \{P(f) \ / \ P \in \mathbb{K}_{a-1}[X]\}$.

Proposition 17.
Si p est le degré du polynôme minimal d'une matrice A, alors $\dim \mathbb{K}[A] = p$ et $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.
Si p est le degré du polynôme minimal d'un endomorphisme f, alors $\dim \mathbb{K}[f] = p$ et $(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{p-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

Exercices :

6) Soit p, q deux projecteurs tels que $p + q = \mathrm{Id}_E$. Vérifiez que $p \circ q = q \circ p = 0$. Déterminez un polynôme annulateur de $f = 2p + 3q$.
Donnez une expression générale de f^p en fonction de f et p.

7) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A.
Donnez une expression générale de A^p en fonction de A et p.

Corollaire 1. *Si $\mathbb{K}'$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, ses polynômes minimaux relativement à $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ sont égaux : $\mu_{A,\mathbb{K}} = \mu_{A,\mathbb{K}'}$.*
Autrement dit, le polynôme minimal ne dépend pas du corps $\mathbb{K}$.

4 Matrices semblables, trace

4.1 Trace d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

L'application trace vérifie de remarquables propriétés.

Proposition 18.

- ▷ *La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
- ▷ *Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{tr}(A)$*
- ▷ *Pour tout couple $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.*

4.2 Matrices semblables

Définition. Soit A, B deux matrices carrées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et B sont semblables quand il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 19. *La relation de similitude entre matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une relation d'équivalence.*

La relation de similitude est une relation très contraignante. **Il n'existe pas de caractérisation simple de la similitude entre deux matrices carrées : savoir si deux matrices sont semblables est un problème difficile.**
D'après la formule de changement de bases, on a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 20. *Deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ sont semblables si et s.si elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes. La matrice P est la matrice de passage d'une base à l'autre.*

Corollaire 2. *Deux matrices semblables ont le même rang, la même trace, le même déterminant.*

Mais c'est très loin d'être suffisant pour être semblables.

Proposition 21. *Si A et B sont deux matrices semblables, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ et $P(B)$ sont semblables avec la même matrice de passage.*

4.3 Trace d'un endomorphisme

Proposition 22. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$.*
Toutes les matrices carrées représentant f ont la même trace. Cette trace ne dépend donc pas du choix de la base dans laquelle on écrit la matrice de f, elle ne dépend que de f : on l'appelle la trace de f, notée $\mathrm{tr}(f)$.

On peut alors reformuler les résultats sur la trace d'une matrice.

Proposition 23.

- ▷ *La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{L}(E)$.*
- ▷ *Pour tout couple $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$.*

5 Opérations par blocs

5.1 Cas général

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On fixe deux entiers k, ℓ tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant \ell \leqslant p-1$.
À toute matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on associe quatre matrices obtenues en découpant la matrice en blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $A = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant \ell}}$, $B = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ \ell+1 \leqslant j \leqslant p}}$, $C = (m_{i,j})_{\substack{k+1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant \ell}}$ et $D = (m_{i,j})_{\substack{k+1 \leqslant i \leqslant n \\ \ell+1 \leqslant j \leqslant p}}$.
Cette décomposition par blocs permet de faire des calculs formellement comme s'il s'agissait de nombres.

Proposition 24. *Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices de même taille décomposées de la même façon en blocs.*
Alors $M + M' = \begin{pmatrix} A+A' & B+B' \\ C+C' & D+D' \end{pmatrix}$, $\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda A & \lambda B \\ \lambda C & \lambda D \end{pmatrix}$.

Proposition 25. *Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ deux matrices telles que le produit MM' existe et décomposées en blocs.*
Alors sous réserve que les blocs soient de tailles compatibles pour la multiplication, on a
$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$

Remarque.
- — Comme les symboles mis en jeu ne sont pas des nombres mais des matrices, il est indispensable de respecter l'ordre dans les produits.
- — On peut généraliser à un quelconque nombre de blocs, pas forcément deux en ligne ou en colonne.

5.2 Cas particuliers des matrices carrées

Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors avec les mêmes notations, on choisit **toujours** A et D carrées elles aussi. Dans ce paragraphe, on suppose que c'est le cas.

Définition. On dit que M triangulaire supérieure par blocs quand il existe des matrices carrées $A_1, \dots, A_k$ telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & ? & ? & \dots & ? \\ 0 & A_2 & ? & \dots & ? \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k-1} & ? \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

On définit de même la notion de matrice triangulaire inférieure par blocs.

Définition. On dit que M diagonale par blocs quand il existe des matrices carrées $A_1, \dots, A_k$ telles que M soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

Les résultats sur les matrices triangulaires ou diagonales restent valables par blocs : la somme, le produit de deux matrices triangulaires supérieures par blocs de mêmes tailles l'est encore, et de même pour les matrices diagonales par blocs.

Une conséquence est qu'une matrice M triangulaire par blocs est inversible si et s.si tous les blocs diagonaux sont inversibles.

Dans ce cas, l'inverse de M est triangulaire par blocs et ses blocs diagonaux sont les inverses des blocs diagonaux de M.

En particulier, l'inverse d'une matrice M diagonale par blocs est la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les inverses de ceux de M.

De plus, le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

5.3 Interprétation des blocs

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un s.e.v. de E.

On dit que F est stable par f quand $f(F) \subset F$, *i.e* pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

Dans ce cas, on peut définir une application φ de F dans F en posant $\varphi(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$.

Il est facile de vérifier que φ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit par f dans F.

Exemple. Si g est un endomorphisme de E qui commute avec f (*i.e.* $f \circ g = g \circ f$), alors $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont stables par f.

Proposition 26. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un s.e.v. de E de dimension p.*

Si F est stable par f, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure par bloc, le premier bloc étant de taille (p, p) :

$$\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ et } A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$$

Réciproquement, si f possède une matrice de cette forme, alors le s.e.v. engendré par les p premiers vecteurs est stable par f.

Proposition 27. *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, $f \in \mathscr{L}(E)$.*

Si $F_1, \dots, F_k$ sont des s.e.v. supplémentaires stables par f de dimensions respectives $p_1, \dots, p_k$, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, la taille du i-ème bloc étant

(p_i, p_i) :

$$\operatorname*{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si f possède une matrice dans une certaine base qui est diagonale par blocs et contenant k blocs carrés, alors il existe k s.e.v. $F_1, \dots, F_k$ stables par f et supplémentaires dans E.