Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on appelle D l'opérateur de dérivation : $D(P) = P'$ et A un opérateur de primitivation : $A(P) = \displaystyle\int_0^X P$, primitive de P qui s'annule en 0.

Q 1. Pour $P \in E$, on pose $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ et $\|P\|_\infty = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.
Montrer que N et $\| \ \|_\infty$ sont deux normes sur E.

Q 2. Sont-elles équivalentes ?

Q 3. Montrer que D est continue pour l'une des deux normes (sous-entendu : on prend la même norme au départ et à l'arrivée) et pas pour l'autre. En cas de continuité, déterminer la norme subordonnée de D.

Q 4. L'application A est-elle continue pour ces normes ? En cas de continuité, déterminer la norme subordonnée.

Maintenant, on change d'espace vectoriel : dans $F = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on appelle encore D l'opérateur de dérivation (*i.e.* $D(f) = f'$).

Q 5. Montrer que D n'est jamais continue de F dans F, quelle que soit la norme choisie sur F.

Exercice hebdomadaire 3 - Corrigé

Q 1. D'abord, on remarque que $N(P)$ n'est pas vraiment la somme d'une série, car pour tout polynôme P, à partir d'un certain rang, $P^{(k)} = 0$, donc la somme est en fait finie.

Si $N(P) = 0$, alors puisque $N(P)$ est une somme de réels positifs, tous ces réels sont nuls donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(0) = 0$. Or d'après la formule de Taylor, $P = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$, donc $P = 0$.

La linéarité de la dérivation et du symbole $\sum$ donnent immédiatement la propriété d'homogénéité de N. Enfin l'inégalité triangulaire découle de celle de la valeur absolue.

N est donc une norme.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, P définit une fonction continue sur le segment $[0, 1]$, donc d'après le th. des bornes atteintes, $\|P\|_\infty$ existe.

Si $\|P\|_\infty = 0$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leqslant |P(t)| \leqslant 0$ donc P est nul sur le segment $[0, 1]$, il a donc une infinité de racines donc il est nul.

L'homogénéité de $\| \ \|_\infty$ découle du fait que multiplier par un réel positif ne change pas le sens des inégalités (voir cours) et l'inégalité triangulaire se démontre classiquement comme dans le cours.

$\| \ \|_\infty$ est donc une norme.

Q 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(X^n) = n!$ alors que $\|X^n\|_\infty = 1$: on a trouvé une suite de polynômes (P_n) telle que le rapport $\dfrac{N(P_n)}{\|P_n\|_\infty}$ n'est pas majoré, les deux normes ne peuvent pas être équivalentes.

Q 3. On commence par remarquer que D est une application linéaire. Montrer qu'elle est continue revient donc à montrer qu'elle est lipschitzienne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D(X^n) = nX^{n-1}$ donc $\|D(X^n)\|_\infty = n$ alors que $\|X^n\|_\infty = 1$: il est donc impossible qu'il existe une constante K telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\|D(P)\|_\infty \leqslant K\|P\|_\infty$: D n'est pas continue pour la norme infinie.

En revanche, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $N(D(P)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k+1)}(0)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| = N(P)$. Donc D est continue pour la norme N. De plus, la norme subordonnée est majorée par 1.

Dans l'inégalité précédente, il y a égalité quand $P = X$. Donc la norme subordonnée est exactement 1.

Q 4. A est encore une application linéaire.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $x \in [0, 1]$, $|A(P)(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^x |P(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \|P\|_\infty \,\mathrm{d}t = x\|P\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$.

Donc pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\|A(P)\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty$.

Donc A est continue pour la norme $\| \ \|_\infty$. De plus, la norme subordonnée est majorée par 1.
Dans l'inégalité précédente, il y a égalité quand $P = 1$. Donc la norme subordonnée est exactement 1.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q = A(P)$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $Q^{(k)} = P^{(k-1)}$ et $Q(0) = 0$, donc $N(Q) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |P^{(k-1)}(0)| = N(P)$. Donc D est continue pour la norme N. De plus, la norme subordonnée est exactement 1.

Q 5. Soit N une norme quelconque sur E.

Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$, alors $f' = kf$ donc $N(D(f_k)) = N(kf_k) = kN(f_k)$.

Si D est continue pour la norme N, alors il existe une constante K telle que pour tout $f \in E$, $N(f') \leqslant KN(f)$, donc on en déduit que pour tout $k > 0$, $N(f_k') = kN(f_k) \leqslant KN(f_k)$ et comme $N(f_k) > 0$, on a alors $k \leqslant K$: on fait tendre k vers ∞, on obtient la contradiction voulue.

Donc D n'est continue pour aucune norme.