Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Q 1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ vérifie-t-elle le critère spécial des séries alternées ?

Q 2. En utilisant un dév. limité, montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge. On note S sa somme.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$.

Q 3. Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge et que $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Q 4. On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. Exprimez $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ à l'aide de H_{2n+1} et H_n.

Q 5. On rappelle le célèbre développement asymptotique

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \text{ où } \gamma \text{ est une constante}$$

Donnez la valeur de S.

Exercice hebdomadaire 2 - Corrigé

Q 1. Pour $n \geqslant 2$, $|u_{n+1}| - |u_n| = \dfrac{1}{n+1+(-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{n+(-1)^n} = \dfrac{2(-1)^n - 1}{(n+1-(-1)^n)(n+(-1)^n)}$: le dénominateur est évidemment positif, mais le numérateur prend alternativement les valeurs 1 ou -3, donc la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante à partir d'un certain rang. On ne peut donc pas appliquer le critère spécial des séries alternées (CSSA).

Q 2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \times \dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \dfrac{(-1)^n}{n} \times \left(1 - \dfrac{(-1)^n}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

$= \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

La série $\sum u_n$ est donc la somme de deux séries : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $-\sum \left(\dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$. La première est convergente d'après le CSSA. La seconde a un terme général équivalent à $\dfrac{-1}{n^2}$, qui est le terme d'une série convergente négative, donc d'après le th. de comparaison des séries à termes positifs (TCSTP), cette série converge.

Donc la série $\sum u_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

Q 3. Pour $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{-1}{2n(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{4n^2}$. Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par comparaison de séries de signe constant (*i.e.* d'après le TCSTP), la série $\sum v_n$ converge.

Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}(u_{2k} + u_{2k+1}) = \sum_{k=2}^{2n+1} u_k$ (règles de calcul classiques sur les symboles $\sum$: ici, c'est l'associativité de la somme). Or $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n+1} u_k$ est une somme partielle de la série convergente $\sum u_n$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k = S$, autrement dit $\displaystyle S = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

Q 4. Pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} u_{2k} + \sum_{k=1}^{n} u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}H_n$,

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=3}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} = (H_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(H_n - 1) = H_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}H_n$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = H_{2n+1} - 1 - H_n$.

Q 5. $H_{2n+1} = \ln(2n+1) + \gamma + o(1)$ et $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ donc $H_{2n+1} - 1 - H_n = \ln \dfrac{2n+1}{n} - 1 + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2 - 1$.

$$S = \ln 2 - 1$$