Mpi - Programme de colles 2

Semaine du 23 au 27 septembre 2024

1 Espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

a) Reprise du programme précédent : normes, boules, convergence des suites, point adhérent.

b) Limites de fonctions entre deux e.v.n. Propriétés usuelles : th. d'opérations, unicité de la limite, toute fonction ayant une limite est bornée au voisinage de $\ldots$, caractérisation séquentielle de la limite, composition des limites. En dimensions finies, indépendance de la définition de fonction ayant une limite vis-à-vis des normes choisies. Extension aux cas des limites infinies, des limites en $+\infty$ ou $-\infty$, des limites quand $||x||$ tend vers l'infini.

c) Fonctions continues, propriétés usuelles. Cas de la dimension finie. Fonctions lipschitziennes, exemple : la distance à une partie, caractérisation des points adhérents grâce à cette distance. Cas particuliers des applications linéaires, différentes caractérisations des applications linéaires continues. Cas particulier en dimension finie. Norme subordonnée (ou norme triple) d'une application linéaire continue. La norme subordonnée est une norme sous-multiplicative. Norme subordonnée d'une matrice carrée.

2 Séries numériques ou vectorielles : reprise du programme précédent

3 Familles sommables : révision de Première Année

On considère des familles de vecteurs dans un e.v.n. de dimension finie. Tous les résultats sont admis.

a) Familles de réels positifs : définition de la somme d'une telle famille comme élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, la famille est dite sommable quand sa somme est réelle. Propriétés calculatoires. Théorème de sommation par paquets. Théorème de Fubini sur les familles indexées par un produit cartésien. Dans le cas de familles indexées par $\mathbb{N}$, lien avec les séries à termes positifs, invariance de la somme par modification de l'ordre des termes de la série ou par regroupement de termes.

b) Familles de réels de signes quelconques, de complexes ou de vecteurs : définition de la sommabilité, définition de la somme dans ce cas. Propriétés de linéarité et d'inégalité triangulaire. Théorème de sommation par paquets. Théorème de Fubini sur les familles indexées par un produit cartésien.

Savoir faire :

— dans le cas où f est linéaire, présenter la démonstration de :
$$f \text{ continue} \Rightarrow f \text{ bornée sur une boule } B(0,r) \Rightarrow f \text{ lipschitzienne}$$

— démontrer la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

— démontrer l'équivalence entre la définition séquentielle d'un point adhérent et la définition à l'aide de boules