Familles sommables

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé de **dimension finie** (qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\| \ \|$ la norme associée (qui est dans ce cas la valeur absolue ou le module).
Si A, B sont deux ensembles, alors on note $A \subset_f B$ pour indiquer que A est un sous-ensemble fini de B.

1 Sommes finies

1.1 Définition

D'abord un rappel : on définit par récurrence la somme de n éléments numérotés de E $x_1, \dots, x_n$ par

— si $n = 0$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$ (une somme vide a pour valeur 0 par convention) ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + x_{n+1}$.

On définit de même par récurrence les sommes de la forme $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} x_k$ quand $p - 1 \leqslant q$ (si $q = p - 1$, la somme est vide donc vaut 0).

Proposition 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ $2n$ éléments de E, λ un scalaire.*
Alors

— *pour tout $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $p \leqslant q$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$;*

— *pour toute bijection φ de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$;*

— *pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=p}^{n} y_k$ et $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} x_k$;*

— *si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \leqslant y_k$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k \leqslant \sum_{k=p}^{n} y_k$.*

Démonstration.

— On pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition

$$« \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \forall (p, q) \in [\![1, n]\!]^2 \quad p \leqslant q \Rightarrow \sum_{k=p}^{q} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k ».$$

Si $n = 1$, alors pour tout $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, $p = q = 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = x_1 + 0 = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(p, q) \in [\![1, n+1]\!]^2$ tel que $p \leqslant q$:

- si $q \leqslant n$, alors par définition, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{n} x_k + x_{n+1}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence,
$\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$;
- si $q = n + 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + 0 = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$.

Dans les deux cas, on a montré $\displaystyle\sum_{k=p}^{n+1} x_k = \sum_{k=p}^{q} x_k + \sum_{k=q+1}^{n+1} x_k$. Autrement dit $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

— on pose $\mathscr{Q}(n)$ le prédicat

« pour toute bijection φ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, $\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ ».

$\mathscr{Q}(1)$ est vraie, car la seule bijection de $[\![1,1]\!]$ dans lui-même est l'application $1\mapsto 1$.
Si $\mathscr{Q}(n)$ est vraie, alors soit $(x_1,\dots,x_{n+1})\in E^{n+1}$ et φ une bijection φ de $[\![1,n+1]\!]$ dans lui-même :

- si $\varphi(n+1)=n+1$, alors φ induit une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$, donc $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$;
- si $\varphi(n+1)=m\neq n+1$, alors
on pose $\psi=(m,n+1)\circ\varphi$ (composée d'une transposition avec φ) et $a=\varphi^{-1}(n+1)$,
dans ce cas, $\psi(n+1)=n+1$, $\psi(a)=m$ et pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]-\{a,n+1\}$, $\psi(k)=\varphi(k)$, donc d'après le cas précédent, $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{\psi(k)}$, donc en utilisant le résultat précédent,

$$\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \sum_{k=1}^{a-1} x_{\psi(k)} + x_{\psi(a)} + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\psi(k)} + x_{\psi(n+1)} = \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_m + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{n+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{a-1} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(n+1)} + \sum_{k=a+1}^{n} x_{\varphi(k)} + x_{\varphi(a)} = \sum_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$$

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=1}^{n+1} x_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$. Autrement dit $\mathscr{Q}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{Q}(n)$ est vraie.

— on pose $\mathscr{R}(n)$ le prédicat « $\forall(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)\in E^{2n} \quad \forall p\in[\![1,n]\!] \quad \sum_{k=p}^{n}(x_k+y_k) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=p}^{n} y_k$ ».

$\mathscr{R}(1)$ est vraie, car $\sum_{k=1}^{1}(x_k+y_k) = x_1+y_1 = \sum_{k=1}^{1} x_k + \sum_{k=1}^{1} y_k$.
Si $\mathscr{R}(n)$ est vraie, alors soit $p\in[\![1,n+1]\!]$,

- si $p\leqslant n$, alors $\sum_{k=p}^{n+1}(x_k+y_k) = \sum_{k=p}^{n}(x_k+y_k) + (x_{n+1}+y_{n+1}) = \sum_{k=p}^{n} x_k + \sum_{k=p}^{n} y_k + x_{n+1} + y_{n+1} = \sum_{k=p}^{n} x_k + x_{n+1} + \sum_{k=p}^{n} y_k + y_{n+1} = \sum_{k=p}^{n+1} x_k + \sum_{k=p}^{n+1} y_k$
- si $p=n+1$, alors on conclut directement comme dans le cas $n=1$

Dans les deux cas, on a montré $\sum_{k=p}^{n+1}(x_k+y_k) = \sum_{k=p}^{n+1} x_k + \sum_{k=p}^{n+1} y_k$. Autrement dit $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{R}(n)$ est vraie.

— Les derniers points se démontrent de même par récuurence.

•

Proposition 2. *Soit I un ensemble fini et non vide d'indices, n son cardinal. Soit f,g deux bijections de $[\![1,n]\!]$ dans I (des énumérations de I).*

Alors pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{g(k)}$.

Démonstration. Soit I un ensemble fini et non vide d'indices, n son cardinal, f,g deux énumérations de I et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Alors $g^{-1}\circ f$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même, donc d'après la proposition 1,

$$\sum_{k=1}^{n} x_{g(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_{g(g^{-1}\circ f(k))} = \sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}.$$

•

Autrement dit, quel que soit l'ordre dans lequel on numérote les éléments de la famille $(x_i)_{i\in I}$ puis en les additionnant dans cet ordre, on obtient toujours la même somme.

Définition. Si I est un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, alors on pose $\sum_{i\in I} x_i$ la valeur d'une somme $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}$, où f est une quelconque bijection de $[\![1,n]\!]$ dans I.

Cette définition est cohérente, puisque la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} x_{f(k)}$ ne dépend pas du choix de f d'après le proposition précédente. Autrement dit, il est inutile de connaître l'énumération choisie pour additionner les éléments de la famille, on peut considérer cette somme comme une somme « en vrac » de tous les éléments.

1.2 Propriétés

Proposition 3. *Soit I un ensemble fini d'indices et $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in J}$ deux familles d'éléments de E, λ un scalaire.*
Alors

— *pour toute bijection f d'un ensemble J dans I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{f(j)}$ (changement de variable, d'indice dans une somme) ;*

— *pour toute bijection f de I dans lui-même, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{f(i)}$ (propriété de commutativité) ;*

— *pour tout couple (J, J') de parties de I disjointes et de réunion I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J'} x_i$ (propriété d'associativité) ;*

plus généralement, pour toute partition $(I_k)_{k\in K}$ de l'ensemble I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)$;

— $\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ *et* $\sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i$ *;*

— *si pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$, alors $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.*

Démonstration. On appelle n le cardinal de I.

— Soit f une bijection de J dans I. On choisit une énumération ψ de J. Alors $f \circ \psi$ est une énumération de I.
Alors par définition, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{f\circ\psi(k)}$ et $\sum_{j\in J} x_{f(j)} = \sum_{k=1}^{n} x_{f(\psi(k))}$, donc $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} x_{f(j)}$.

— Cas particulier $I = J$ du point précédent.

— Soit (J, J') un couple de parties de I disjointes et de réunion I. On note q le cardinal de J, de sorte que $n - q$ est le cardinal de J'.
On choisit une énumération φ de J et une énumération ψ de J, alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \theta: & [\![1,n]\!] & \longrightarrow & I \\ & k & \longmapsto & \varphi(k) \text{ si } k \leqslant q \\ & k & \longmapsto & \psi(k-q) \text{ si } k \geqslant q+1 \end{array}$$

est une énumération de I.
Donc $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{\theta(k)} = \sum_{k=1}^{q} x_{\theta(k)} + \sum_{k=q+1}^{n} x_{\theta(k)} = \sum_{k=1}^{q} x_{\varphi(k)} + \sum_{k=q+1}^{n} x_{\psi(k-q)} = \sum_{k=1}^{q} x_{\varphi(k)} + \sum_{k=1}^{n-q} x_{\psi(k)} = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J'} x_i$.
Puis si $(I_k)_{k\in K}$ est une partition de l'ensemble I, l'ensemble K est fini donc par récurrence sur le cardinal b de K, on montre $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)$ en utilisant le cas $b = 2$ démontré précédemment (il suffit de choisir un élément a de K, poser $J = I_a$ et $J' = \bigsqcup_{k\in K-\{a\}} I_k$ et remarquer que la famille $(I_k)_{k\in K-\{a\}}$ est une partition de l'ensemble J' et que le cardinal de $K - \{a\}$ est $b - 1$)

— Démonstrations immédiates des deux derniers points en utilisant une énumération de I.

•

2 Conventions de calcul dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

L'ensemble $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est muni d'une addition : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}^2$,
- si x et y sont réels, $x + y$ est la somme habituelle de deux réels positifs ;
- si $x = +\infty$ ou $y = +\infty$, alors on pose $x + y = +\infty$.

et d'une multiplication :
- si x et y sont réels, xy est le produit habituel de deux réels positifs ;
- si $x = 0$ ou $y = 0$, alors on pose $xy = 0$;
- si $x = y = +\infty$, alors on pose $xy = +\infty$.

Il est aussi muni d'une relation d'ordre :
- si x et y sont deux réels, alors $x \leqslant x$ ou $x < y$ désignent les relations habituelles ;
- si x est réel et $y = +\infty$, alors on pose $x \leqslant +\infty$ et aussi $x < +\infty$;
- si $x = y = +\infty$, alors $+\infty \leqslant +\infty$.

Proposition 4. *L'addition dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est associative, commutative, et admet pour neutre 0.*
La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
De plus l'addition et la mutilplication sont compatibles avec la relation d'ordre : on peut additionner ou multiplier deux inégalités membre à membre.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, non vide.
Si A est une partie ne contenant pas $+\infty$, alors
- si A est majorée, elle possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$;
- sinon on pose $\sup A = +\infty$.

Si A est une partie contenant $+\infty$, alors on pose $\sup A = +\infty$.

Cette définition prolonge la notion de borne supérieure à toutes les parties de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, au sens où pour toute partie A de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\sup A$ est le plus petit majorant dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ de la partie A.

3 Somme d'une famille de réels positifs

Définition. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
On pose $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} x_j \ / \ J \subset_f I \right\}$.

Remarque. Cette définition est sensée, car l'ensemble $\displaystyle\left\{ \sum_{i \in J} x_j \ / \ J \subset_f I \right\}$ est une partie de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, donc possède toujours une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Définition. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable quand $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i < +\infty$.

Évidemment, une famille sommable positive ne peut pas prendre la valeur $+\infty$, autrement dit une famille sommable est nécessairement une famille de réels positifs.

3.1 Propriétés

Proposition 5. *La somme d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est invariante par permutation (*i.e *par changement de variable) :*
si σ est une permutation de I, alors $\displaystyle\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$.
En particulier, si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable, de même somme.

En particulier, dans le cas où $I = N$, si une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, alors on dit qu'elle est commutativement convergente : changer l'ordre des termes change bien sûr les valeurs des sommes partielles mais ne change pas la valeur de la limites de ces sommes partielles.

Démonstration.

•

Proposition 6. *Soit $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et λ un réel positif. Alors $\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ et $\sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i$.*

Démonstration. Pour simplifier, on note $S(x)$ la somme $\sum_{i\in I} x_i$.

— Soit $J \subset_f I$. Alors $\sum_{i\in J}(x_i + y_i) = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in J} y_i \leqslant S(x) + S(y)$.
Ceci étant vraie pour toute partie finie J de I, on en déduit que $S(x + y) \leqslant S(x) + S(y)$.
Réciproquement, soit $J \subset_f I$, $K \subset_f I$.
Alors $\sum_{i\in J} x_i + \sum_{i\in K} y_i \leqslant \sum_{i\in J\cup K} x_i + \sum_{i\in J\cup K} y_i = \sum_{i\in J\cup K} (x_i + y_i) \leqslant S(x + y)$.
On a montré que pour tout $J \subset_f I$, $\sum_{i\in J} x_i \leqslant S(x + y) - \sum_{i\in K} y_i$. Donc $S(x) \leqslant S(x + y) - \sum_{i\in K} y_i$.
On a montré que pour tout $K \subset_f I$, $\sum_{i\in K} y_i \leqslant S(x + y) - S(x)$. Donc $S(y) \leqslant S(x + y) - S(x)$ *i.e.* $S(x) + S(y) \leqslant S(x + y)$.
Avec les deux inégalités en sens opposé, on en déduit l'égalité $S(x + y) = S(x) + S(y)$.

— Soit $J \subset_f I$. Alors $\sum_{i\in J}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i\in J} x_i \leqslant \lambda S(x)$.
Ceci étant vraie pour toute partie finie J de I, on en déduit que $S(\lambda x) \leqslant \lambda S(x)$.
Si $\lambda = 0$, on a directement $S(\lambda x) = \lambda S(x) = 0$.
Si $\lambda > 0$, alors de même, $S(x) = S\left(\frac{1}{\lambda}\lambda x\right) \leqslant \frac{1}{\lambda} S(\lambda x)$, donc $\lambda S(x) \leqslant S(\lambda x)$.
Avec les deus inégalités en sens opposé, on en déduit l'égalité $S(\lambda x) = \lambda S(x)$.

•

Corollaire 1. *La somme de deux familles positives est sommable si et s.si les deux familles sont sommables.*
Le produit par un réel strictement positif d'une famille positive est sommable si et s.si la famille est sommable.

Proposition 7. *Soit $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*
Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$ et la famille $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ l'est aussi et $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

3.2 Théorème de sommation par paquets

Théorème 1. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.*
Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p\in P}$ de parties (i.e. deux à deux disjointes et de réunion I), alors

$$\sum_{p\in P}\left(\sum_{i\in I_p} x_i\right) = \sum_{i\in I} x_i$$

3.3 Théorème de Fubini

Théorème 2. *Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right)$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \ldots \times I_k$.
Un cas particulier courant.

Proposition 8. *Soit $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j_in J}$ deux familles de réels positifs.*
Alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et s.si les familles $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j_in J}$ sont sommables, dans ce cas on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j$$

4 Familles sommables dans un espace vectoriel de dimension finie

4.1 Définitions

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable quand la famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire quand $\sum\limits_{i\in I} \|x_i\| < +\infty$.

Cette définition est indépendante du choix de la norme, car en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

a) Cas réel

Définition. Soit x un réel.
On appelle partie positive de x le réel $x^+ = \max(0, x)$ et partie négative de x le réel $x^- = -\min(x, 0)$.

On remarque les égalités suivantes : $|x| = x^+ + x^-$ et $x = x^+ - x^-$.

Proposition 9. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels, alors les deux familles positives $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et on a bien sûr $\sum\limits_{i\in I} |x_i| = \sum\limits_{i\in I} x_i^+ + \sum\limits_{i\in I} x_i^-$.*

On pose alors $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{i\in I} x_i^+ - \sum\limits_{i\in I} x_i^-$, qui est un réel tel que $\left|\sum\limits_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum\limits_{i\in I} |x_i|$.

b) Cas complexe

Proposition 10. *Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille sommable de nombres complexes, alors les deux familles réelles $(\Re(a_k))_{k\in I}$ et $(\mathrm{Im}(a_k))_{k\in I}$ sont sommables.*

On pose alors $\sum\limits_{k\in I} a_k = \sum\limits_{k\in I} \Re(a_k) + i \sum\limits_{k\in I} \mathrm{Im}(a_k)$, qui est un complexe tel que $\left|\sum\limits_{k\in I} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k\in I} |a_k|$.

Exemples.
- Toute famille finie est sommable et sa somme au sens des familles sommables est sa somme habituelle.
- Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et s.si elle est absolument convergente.

Exercices :

1) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

c) Cas général

Comme E est de dimension finie, on en choisit une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$.
Pour toute famille sommable $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, on note $x_{i,1}, \dots, x_{i,p}$ les coordonnées de x_i dans la base $\mathscr{B}$.
Alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la famille de réels ou complexes $(x_{i,k})_{i\in I}$ est sommable.

On pose alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ le vecteur qui a pour coordonnées $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} x_{i,1}, \dots, \sum_{i\in I} x_{i,p}\right)$ dans la base $\mathscr{B}$.
On note $\ell^1(I, E)$ l'ensemble des familles sommables de E indexées par I.

4.2 Propriétés

Proposition 11. *Toute sous-famille d'une famille sommable de E est elle-même sommable.*
Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable, de même somme.

En particulier, les séries absolument convergentes sont commutativement convergentes.
Les familles sommables sont celles qui sont approchables par des familles finies à ε près au sens de la proposition suivante.
Comme pour les séries, on dispose d'un théorème de comparaison entre familles sommables.

Proposition 12. *Soit $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments indexées par I.*
Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant \|a_i\| \leqslant b_i$ et la famille $(b_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ l'est aussi et $\displaystyle\left\|\sum_{i\in I} a_i\right\| \leqslant \sum_{i\in I}\|a_i\| \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.

La linéarité est encore vérifiée, mais n'est pas évidente au regard des définitions.

Proposition 13. *L'ensemble $\ell^1(I, E)$ est un espace vectoriel et l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ est une forme linéaire :*
si $(a_i), (b_i)$ sont dans $\ell^1(I, E)$ et λ un scalair, alors $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda\sum_{i\in I} a_i$.

4.3 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de E.*
*Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p\in P}$ de parties (*i.e.* deux à deux disjointes et de réunion I), alors pour tout $p \in P$, la sous-famille $(a_i)_{i\in I_p}$ est sommable et*

$$\sum_{p\in P}\left(\sum_{i\in I_p} a_i\right) = \sum_{i\in I} a_i$$

Exercices :

2) Montrez que pour tout complexe z tel que $0 < |z| < 1$, la famille $(z^{|n|}_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculez sa somme.
3) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{\max(m,n)^3}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable et calculez sa somme en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

4.4 Théorème de Fubini

Théorème 4. *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de E.*
Alors pour tout $i\in I$, la famille $(a_{i,j})_{j\in J}$ est sommable ; pour tout $j\in I$, la famille $(a_{i,j})_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right)$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1\times\ldots\times I_k$.

Exercices :

4) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$ est sommable et calculez sa somme.

Un cas particulier courant.

Proposition 14. *Soit $(a_i)\in\ell^1(I)$, $(b_j)\in\ell^1(J)$.*
Alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j$$

4.5 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à termes dans E.

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}$.

Remarque. Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.
Exemple très courant : les séries commencent au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} c_n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kb_{n+1-k}$.

Théorème 5. *Si les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Un exemple fondamental.

Proposition 15. *Soit $z\in\mathbb{C}$. La série de terme général $\dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente et*

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

Remarque. L'absolue convergence des séries est indispensable ! Si on ne suppose que la convergence des séries, alors le produit de Cauchy peut très bien être une série divergente (voir exercice).

Exercices :

5) Soit $x > 0$. On pose b_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et $c_n = \frac{b_n}{x^n}$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge. Dans le cas où elle converge, donnez la valeur de sa somme en fonction de x.
6) Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, mais que son produit de Cauchy avec elle-même diverge (indication : pour tout $b > 0$ et $x \in [0, b]$, $x(b-x) \leqslant \frac{b^2}{4}$).