Problème 1 - Transformation d'Abel et applications

On rappelle la convention habituelle sur les symboles $\sum$: si $p > q$, alors $\sum_{k=p}^{q} \dots = 0$.

I. Transformation d'Abel

Soient (a_n), (b_n) deux suites réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

Q 1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

Q 2. Dans cette question, on suppose que
- la suite (B_n) est bornée ;
- la suite (a_n) converge vers 0 ;
- la série $\sum_{n \geqslant 0} (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente.

Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 0} (a_{n+1} - a_n) B_n$ converge, puis que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge aussi et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$.

Q 3. Dans cette question, on suppose que
- la suite (B_n) est bornée ;
- la suite (a_n) est positive, décroissante et converge vers 0.

Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.

Q 4. Énoncez le critère spécial des séries alternées et démontrez-le à l'aide de ce qui précède.

II. Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$.

Q 5. On suppose $x \not\equiv 0 \ [2\pi]$. Calculez $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ puis déduisez-en que

$$C_n(x) = \frac{-1}{2} + \frac{\sin((2n+1)\frac{x}{2})}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

$$S_n(x) = \frac{\sin(n\frac{x}{2})\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Q 6. À l'aide de la question **Q 3**, montrez la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour toute valeur de x.

On pose désormais $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Q 7.

a) Justifiez que f est impaire et 2π-périodique.

b) Pour $x \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrez que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \, \mathrm{d}t$.

Q 8. Soit $x \in]0,\pi[$. Pour $t \in [x,\pi]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$.

a) Justifiez que h est de classe C^1 sur $[x,\pi]$ et que h' y est bornée. On note $M_x = \sup\limits_{[x,\pi]} |h'|$.

b) Montrez que $\displaystyle\int_x^\pi h(t)\sin\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos((2n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} + \int_x^\pi h'(t)\cos\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right)$.

Q 9. Soit $x \in]0,\pi[$.

a) Montrez que $\displaystyle\left|\int_x^\pi h(t)\sin\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} + (\pi - x)M_x\right)$.

b) Déduisez-en que $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Q 10.

a) Montrez que pour tout $x \in]0,2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

b) Donnez l'allure de la courbe de f sur $[-2\pi, 4\pi]$.

Problème 2

Soit α un réel positif ou nul. On définit la suite réelle u par récurrence : $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.

I. Préliminaires

Q 1. On note $s_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Il est bien connu que si $\alpha = 1$, alors $s_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Montrez que :

— si $\alpha > 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n(\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$;

— si $\alpha < 1$, alors $s_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$;

Q 2. Déterminez le signe et la monotonie de la suite u.

II. Cas $\alpha > 1$

Dans cette partie, on traite le cas où $\alpha > 1$.

Q 3. Donnez une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$. Déduisez-en que la suite u converge. On note ℓ sa limite.

Q 4. Montrez que $\ell \leqslant u_1 + \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)u_1}$.

III. Cas $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Dans cette partie, on suppose $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. On étudie d'abord la limite de la suite (u_n) puis on cherche un équivalent simple de u_n quand n tend vers l'infini.

Q 5. Montrez par l'absurde que la suite u diverge vers $+\infty$. Déduisez-en que $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Q 6. On suppose $0 \leqslant \alpha < 1$ dans cette question.

a) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = \dfrac{2}{k^\alpha} + \dfrac{1}{k^{2\alpha}u_k^2}$. Déduisez-en un équivalent de $u_{k+1}^2 - u_k^2$ quand $k \to +\infty$.

b) Déduisez-en que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{1-\alpha}}\, n^{\frac{1-\alpha}{2}}$.

Q 7. En vous inspirant que la question précédente, montrez que dans le cas où $\alpha = 1$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln n}$.

Problème 3 - Séries de Engel

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites u d'entiers naturels, croissantes et telles que $u_0 \geqslant 2$.

À toute suite $u \in \mathscr{C}$, on associe la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_n}$.

Q 1. Montrez que pour tout $u \in \mathscr{C}$, la série associée converge. On pose $S(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_n}$. Justifiez $0 < S(u) \leqslant 1$.

Q 2.

a) Un cas particulier : dans cette question, u est la suite constante égale à $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Calculez $S(u)$.

b) On rappelle qu'une suite est dite stationnaire quand elle est constante à partir d'un certain rang.

Soit $u \in \mathscr{C}$. Montrez que si u est stationnaire, alors $S(u)$ est un rationnel.

Q 3. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor + t - 1$.

a) Montrez que pour tout $t > 0$, $0 < f(t) \leqslant t$, puis que l'intervalle $]0, 1]$ est stable par f.

b) Soit $x \in]0, 1]$. On définit la suite (a_n) par récurrence par : $a_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Justifiez que la suite (a_n) est bien définie, à termes dans $]0, 1]$ et qu'elle est décroissante.

Q 4. Soit $x \in]0, 1]$. On reprend les notations de la question précédente. On pose maintenant $u_n = \left\lfloor \dfrac{1}{a_n} \right\rfloor + 1$.

a) Vérifiez que la suite u ainsi définie appartient à $\mathscr{C}$. On peut donc parler du réel $S(u)$.

b) En exprimant $a_n u_n - 1$ en fonction de a_{n+1}, montrez que $S(u) = x$.

Q 5.

a) Montrez que si $(u, v) \in \mathscr{C}^2$ et $u_0 < v_0$, alors $S(u) > S(v)$.

b) Montrez que l'application S de $\mathscr{C}$ dans $]0, 1]$ est une bijection.

Q 6. Dans la question 1, on a montré que si $u \in \mathscr{C}$ est stationnaire, alors $S(u)$ est un rationnel. On montre la réciproque dans cette question. On suppose donc que $x = S(u) \in]0, 1]$ est un rationnel, on le note $\dfrac{p}{q}$ où $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. On reprend les notations des questions 3 et 4.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, qa_n est un entier.

b) Déduisez-en que la suite (a_n) est stationnaire, puis concluez.

Q 7. Une application : montrez que e n'est pas un rationnel.

Problème 1

I.

Q 1. On note que pour tout $k \geqslant 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$ et que $b_0 = B_0$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k$$

$$= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

Q 2. On pose M un majorant de la suite $(|B_n|)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|(a_{n+1} - a_n) B_n| \leqslant M |a_{n+1} - a_n|$.

Or par hypothèse, la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge, donc d'après le th. de comparaison de séries à termes positifs (TCSTP), la série $\sum |(a_{n+1} - a_n) B_n|$ converge, autrement dit la série $\sum [(a_{n+1} - a_n) B_n]$ converge absolument (donc converge tout court).

Par conséquent, la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) B_k$ a une limite réelle L. Mais comme (a_n) converge vers 0 et (B_n) est bornée, la suite $(a_n B_n)$ converge vers 0. Donc par opérations sur les limites et grâce à la relation précédente, la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n b_n$ converge vers aussi vers L, *i.e.* la série $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$.

Q 3. La suite (a_n) est décroissante donc la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ est la série télescopique $\sum (a_n - a_{n+1})$, qui converge, car la suite (a_n) converge. Autrement dit la série $\sum_{n \geqslant 0} (a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente.

Les deux autres hypothèses de la question précédente sont vérifiées par les suites de cette question, donc d'après la question **Q 2**, la série $\sum a_n b_n$ converge.

Q 4. Soit (u_n) une suite réelle positive qui décroît vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Pour le démontrer, on spécialise dans la question précédente $a_n \leftarrow u_n$ et $b_n \leftarrow (-1)^n$: la suite (a_n) est alors positive, décroissante et converge vers 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ vaut soit 1 si n est pair, 0 si n est impair, donc la suite (B_n) est bornée.

D'après la questions **Q 3**, la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ converge.

II.

Q 5. Comme $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, e $^{ikx} \neq 1$ donc $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.

Puis on pense à « l'astuce » classique : on passe par l'angle moitié.

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx/2})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x/2})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x/2} \times \frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x/2} \times \frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Les sommes C_n et S_n sont respectivement les parties réelle et imaginaire de cette somme.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) \dfrac{\sin(n\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$. Puis on utilise une formule de trigonométrie pour transformer le produit du sinus et du cosinus en une somme : $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n\frac{x}{2}+(n+1)\frac{x}{2})+\sin(n\frac{x}{2}-(n+1)\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(nx+\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

De même, $S_n(x) = \dfrac{\sin(n\frac{x}{2})\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$.

Q 6. Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors il est évident que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ est la série nulle donc qu'elle converge.

Dans le cas contraire, la question précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$, donc la suite $(S_n(x))$ est bornée.

Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est positive, décroissante et converge vers 0, la question **Q 3** montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ converge.

Q 7.

a) Évident : sin est une fonction impaire et 2π-périodique.

b) Pour $x \in\ ]0,\pi[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on remarque que $\dfrac{\sin(kx)}{k} = -\left[\dfrac{\sin(kt)}{k}\right]_{t=x}^{\pi} = -\displaystyle\int_x^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t$.

Donc par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \int_x^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t = -\int_x^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right)\,\mathrm{d}t = -\int_x^{\pi} C_n(t)\,\mathrm{d}t$.

D'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = -\int_x^{\pi} \left(\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t + \int_x^{\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi - x}{2}.$$

Q 8.

a) h est de classe C^1 sur $[x,\pi]$ comme inverse d'une fonction de classe C^1 qui ne s'annule pas. Donc h' est continue sur le segment $[x,\pi]$, ce qui justifie l'existence de M_x.

b) Intégration par parties (je ne détaille pas).

Q 9.

a) Inégalité triangulaire :

$$\left|\int_x^{\pi} h(t)\sin\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\left|\frac{\cos((2n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right| + \left|\int_x^{\pi} h'(t)\cos\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right|\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\frac{|\cos((2n+1)\frac{x}{2})|}{\sin(\frac{x}{2})} + \int_x^{\pi} \left|h'(t)\cos\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} + \int_x^{\pi} M_x\,\mathrm{d}t\right)$$

donc $\left|\displaystyle\int_x^{\pi} h(t)\sin\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{2}{2n+1}\left(\dfrac{1}{\sin(\frac{x}{2})} + (\pi - x)M_x\right)$.

b) D'après le th. d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_x^{\pi} h(t)\sin\left((2n+1)\tfrac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 0$ donc d'après la question **Q 7 b**,

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$, *i.e.* $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Q 10.

a) La fonction f est impaire donc pour $x \in\ ]-\pi,0[$, $f(x) = -f(-x) = -\dfrac{\pi-(-x)}{2} = \dfrac{-\pi - x}{2}$ car $-x \in\ ]0,\pi[$.

Puis par 2π-périodicité, pour $x \in \pi, 2\pi[$, $f(x) = f(x-2\pi) = \dfrac{-\pi-(x-2\pi)}{2} = \dfrac{\pi - x}{2}$.

Enfin, $f(\pi) = 0$, donc l'égalité précédente est encore valable pour $x = \pi$.

b)

Problème 2

I.

Q 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en additionnant ces inégalités pour k variant de 1 à n, on obtient l'encadrement $s_{n+1}(\alpha) - 1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant s_n(\alpha)$.

On peut réécrire cette double inégalité pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant s_n(\alpha) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$.

On commence par le cas où $\alpha \neq 1$.

Alors $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^n x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^n = \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1)$.

Donc pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1) \leqslant s_n(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1)$.

— si $\alpha > 1$, alors $\alpha - 1 > 0$ donc $s_n(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}(1 - n^{1-\alpha}) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$;

— si $\alpha < 1$, alors $1 - \alpha > 0$ donc $\dfrac{n^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \leqslant s_n(\alpha)$ et de plus, $\dfrac{1}{1-\alpha}(1 - \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}) \leqslant \dfrac{s_n(\alpha)}{n^{1-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{n^{1-\alpha}} + \dfrac{1}{1-\alpha}$ donc par théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n(\alpha)}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}$, autrement dit $s_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Q 2. Par une récurrence évidente, on montre que la suite u est strictement positive, puis grâce à la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$, on en déduit qu'elle est strictement croissante.

II.

Q 3. La suite u est croissante et strictement positive donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_1 > 0$ et $n^\alpha > 0$ donc $\dfrac{1}{n^\alpha u_n} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha u_1}$.

En posant $K = \dfrac{1}{u_1}$, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{K}{n^\alpha}$.

Comme $\alpha > 1$, alors la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge. Or il s'agit de la série télescopique associée à la suite u, donc d'après le cours, la suite u converge.

Q 4. On additionne les inégalités $u_{k+1} - u_k \leqslant \dfrac{K}{k^\alpha}$ pour k variant de 1 à n, on obtient alors $u_{n+1} - u_1 \leqslant K s_n(\alpha)$. Or d'après la partie 1, on sait que $s_n(\alpha) \leqslant \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ puisqu'on est dans le cas où $\alpha > 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leqslant u_1 + K\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} = u_1 + \dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)u_1}$.

On conclut par passage à la limite : $\ell \leqslant u_1 + \dfrac{\alpha}{(\alpha - 1)u_1}$.

III.

Q 5. Si la suite u converge, alors comme elle est croissante et strictement positive, on en déduit que sa limite ℓ est strictement positive.

Donc $u_n \sim \ell$, donc $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha \ell}$. Or $\alpha < 1$ donc la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ diverge. D'après le cours, cela signifie que la suite u diverge (série télescopique associée...). Contradiction.

Donc la suite u diverge et comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$ d'après le th. de la limite monotone.

Puis $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{n^\alpha u_n^2}$, or $n^\alpha \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ ou $n^\alpha = 1$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, donc par opérations sur les limites, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \sim u_n$.

Q 6.

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k+1}^2 - u_k^2 = (u_{k+1} - u_k)(u_{k+1} + u_k) = \dfrac{1}{k^\alpha u_k}\left(2u_k + \dfrac{1}{k^\alpha u_k}\right) = \dfrac{2}{k^\alpha} + \dfrac{1}{k^{2\alpha}u_k^2}$.

Quand $k \to +\infty$, $k^\alpha = o(k^{2\alpha}u_k^2)$, donc $u_{k+1}^2 - u_k^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{k^\alpha}$.

b) La série de terme général $\dfrac{2}{k^\alpha}$ diverge car $\alpha < 1$, donc comme $u_{k+1}^2 - u_k^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{k^\alpha}$, les sommes partielles de ces séries à termes positifs sont équivalentes,

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}^2 - u_k^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2s_n(\alpha)$, c'est-à-dire $u_{n+1}^2 - u_1^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2s_n(\alpha)$.

Comme u_{n+1} tend vers $+\infty$, il vient finalement $u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2s_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

Donc comme $u_{n+1} \sim u_n$, on en déduit $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{1-\alpha}}\, n^{\frac{1-\alpha}{2}}$

Q 7. On a toujours l'égalité $u_{k+1}^2 - u_k^2 = \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k^2u_k^2}$, donc de même $u_{k+1}^2 - u_k^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{k}$, terme général d'une série positive divergente. Donc les sommes partielles sont équivalentes, on a donc
$u_{n+1}^2 - u_1^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2s_n(1)$, ce qui donne $u_{n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2s_n(1) \sim 2\ln n$, donc $u_n \sim u_{n+1} \sim \sqrt{2\ln n}$.

Problème 3

Q 1. Soit $u \in \mathscr{C}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$, alors $u_0u_1\dots u_n \geqslant 2^{n+1}$, donc $0 \leqslant \dfrac{1}{u_0u_1\dots u_n} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

La série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^{n+1}}$ converge car sa raison est de module strictement inférieur à 1, donc d'après le th. de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{u_0u_1\dots u_n}$ converge.

De plus, $0 < S(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{u_0u_1\dots u_n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Q 2.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p$ donc $u_0u_1\dots u_n = p^{n+1}$ donc $S(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p^{k+1}} = \dfrac{1}{p}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = \dfrac{1}{p-1}$.

b) u est stationnaire : soit n_0 un rang à partir duquel tous ses termes sont égaux à un entier p. On pose $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1}\dfrac{1}{u_0u_1\dots u_k}$.

On a alors $S(u) = T + \displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty}\dfrac{1}{p^{k+1}} = T + \dfrac{1}{p^{n_0+1}} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = T + \dfrac{1}{p^{n_0}(p-1)}$.

Comme T est une somme de rationnels et que $\dfrac{1}{p^{n_0}(p-1)}$ en est un aussi, la somme $S(u)$ est donc un rationnel.

Q 3.

a) Par définition de la partie entière, pour tout $t > 0$, on a $\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{t} < \left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor + 1$, donc $t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor \leqslant 1 < t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor + t$, donc $t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor - 1 \leqslant 0 < t\left\lfloor \dfrac{1}{t} \right\rfloor + t - 1$, ce qui revient à dire que $f(t) - t \leqslant 0 < f(t)$, autrement dit $0 < f(t) \leqslant t$.

Si $t \in]0,1]$, alors $0 < f(t) \leqslant t \leqslant 1$ donc $f(t) \in]0,1]$: l'intervalle $]0,1]$ est stable par f.

b) Comme $]0,1]$ est stable par f, alors en prenant le premier terme dans $]0,1]$, la suite a est bien définie et à termes dans $]0,1]$ (preuve par une récurrence évidente : voir cours), puis en utilisant l'inégalité précédente, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = f(a_n) \leqslant a_n$, donc la suite a est décroissante.

Q 4.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$ donc $1 \leqslant \dfrac{1}{a_n}$ et 1 est un entier donc $1 \leqslant \left\lfloor \dfrac{1}{a_n} \right\rfloor$ (le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{1}{a_n}$), donc u_n est un entier naturel au moins égal à 2.

De plus, la suite a est décroissante et positive, donc son inverse est croissante donc comme la fonction partie entière est croissante, on en déduit que u est croissante.

Au total, u est une suite de $\mathscr{C}$.

b) Par un simple calcul, on constate que $a_n u_n - 1 = a_{n+1}$.

On pose $S_n(u)$ la somme partielle d'indice n de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_n}$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $x = S_n(u) + \dfrac{a_{n+1}}{u_0 \dots u_n}$ ».

Pour $n = 0$, $a_0 = x$ et $a_1 = a_0 u_0 - 1$, donc $S_0(x) + \dfrac{a_1}{u_0} = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{a_1}{u_0} = \dfrac{a_1 + 1}{u_0} = \dfrac{a_0 u_0}{u_0} = a_0 = x$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $S_{n+1}(u) + \dfrac{a_{n+2}}{u_0 \dots u_{n+1}} = S_n(u) + \dfrac{1}{u_0 \dots u_{n+1}} + \dfrac{a_{n+2}}{u_0 \dots u_{n+1}} = S_n(u) + \dfrac{a_{n+2}+1}{u_0 \dots u_{n+1}}$

or $a_{n+2} + 1 = a_{n+1} u_{n+1}$ donc $S_{n+1}(u) + \dfrac{a_{n+2}}{u_0 \dots u_{n+1}} = S_n(u) + \dfrac{a_{n+1} u_{n+1}}{u_0 \dots u_{n+1}} = S_n(u) + \dfrac{a_{n+1}}{u_0 \dots u_n} = x$ par hypothèse de récurrence.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$: comme la suite (a_n) est bornée et que $\lim u_0 u_1 \dots u_n = +\infty$, alors $\lim \dfrac{a_{n+1}}{u_0 \dots u_n} = 0$, donc $x = S(u)$ par passage à la limite dans le prédicat $\mathscr{P}(n)$.

Q 5.

a) Il est évident que $S(u) > \dfrac{1}{u_0}$ car $S(u)$ est la somme d'une série à termes strictement positifs.

Comme la suite v est croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{v_0 \dots v_n} \leqslant \dfrac{1}{v_0^{n+1}}$ donc $S(v) \leqslant S(v_0) = \dfrac{1}{v_0 - 1}$ d'après la question **Q 2 a**.

Or u_0 et v_0 sont deux entiers tels que $0 < u_0 < v_0$ donc $0 < u_0 \leqslant v_0 - 1$ donc $\dfrac{1}{v_0 - 1} \leqslant \dfrac{1}{u_0}$.

Donc $\dfrac{1}{v_0} < S(v) \leqslant \dfrac{1}{v_0 - 1} \leqslant \dfrac{1}{u_0} < S(u)$.

b) $u \neq v$ donc on a la négation de la proposition « $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n$ ». Autrement dit il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq v_n$: l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n \neq v_n\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. D'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$, cet ensemble possède un minimum noté p.

On a donc : pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $u_i = v_i$ et $u_p \neq v_p$. Disons par exemple que $u_p < v_p$, donc que $u_p \leqslant v_p - 1$.

On reprend la même idée que celle développée dans la question précédente : les premiers termes des sommes $S(u)$ et $S(v)$ sont égaux jusqu'au rang $p-1$ et à partir du rang p, il y a une inégalité.

$$S(v) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{v_0 v_1 \dots v_i} + \sum_{i=p}^{+\infty} \frac{1}{v_0 v_1 \dots v_i} = S_{p-1}(v) + \frac{1}{v_0 v_1 \dots v_{p-1}} \sum_{i=p}^{+\infty} \frac{1}{v_p \dots v_i}.$$

La suite v est croissante, donc on a encore $\displaystyle\sum_{i=p}^{+\infty} \frac{1}{v_p \dots v_i} \leqslant \sum_{i=p}^{+\infty} \frac{1}{(v_p)^{i-p+1}} \leqslant \frac{1}{v_p - 1}$ (comme en **Q 2 b**).

Or les premiers termes des suites u et v sont égaux jusqu'au rang $p-1$

donc $S_{p-1}(v) = S_{p-1}(u)$ et $\dfrac{1}{v_0 v_1 \dots v_{p-1}} = \dfrac{1}{u_0 u_1 \dots u_{p-1}}$

donc $S(v) = S_{p-1}(u) + \dfrac{1}{u_0 u_1 \dots u_{p-1}} \displaystyle\sum_{i=p}^{n} \frac{1}{v_p \dots v_i}$

donc $S(v) \leqslant S_{p-1}(u) + \dfrac{1}{u_0 u_1 \dots u_{p-1}} . \dfrac{1}{v_p - 1} \leqslant S_{p-1}(u) + \dfrac{1}{u_0 u_1 \dots u_{p-1}} . \dfrac{1}{u_p} < S(u)$.

Donc finalement $S(v) < S(u)$.

De même, dans l'autre cas ($u_p > v_p$), on en déduit que $S(u) < S(v)$. Dans les deux cas, on peut donc conclure que $S(u) \neq S(v)$.

Ceci prouve que S est une application injective. Mais comme **Q 4** montre qu'elle est surjective, elle est donc bijective.

Q 6.

a) Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « qa_n est un entier ».

Pour $n = 0$, $a_0 = x = \dfrac{p}{q}$ donc $qa_0 = p \in \mathbb{N}$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $a_{n+1} = a_n \left\lfloor \dfrac{1}{a_n} \right\rfloor + a_n - 1$ donc $qa_{n+1} = (qa_n) \left\lfloor \dfrac{1}{a_n} \right\rfloor + (qa_n) - q$: qa_n est un entier et $\left\lfloor \dfrac{1}{a_n} \right\rfloor$ en est un aussi donc qa_{n+1} est un entier.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

b) La suite (qa_n) est une suite décroissante d'entiers naturels et infinie : si elle n'était pas stationnaire, alors on pourrait en extraire une suite infinie strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est impossible d'après la propriété fondamentale de $\mathbb{N}$. Donc la suite (qa_n) est stationnaire, donc les suites a et par conséquent u le sont aussi.

Q 7. On sait que $\mathrm{e} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2.3\ldots k}$.

On reconnaît dans la dernière somme le nombre $S(u)$ où u est la suite des entiers au moins égal à 2. Cette suite n'est pas stationnaire, donc sa somme n'est pas un rationnel, donc e n'en est pas un non plus.