Mpi - Programme de colles 1

Semaine du 16 au 20 septembre 2024

1 Espaces vectoriels normés

Les espaces vectoriels considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

a) Reprise du programme précédent : normes, boules, convergence des suites, point adhérent.

b) Limites de fonctions entre deux e.v.n. Propriétés usuelles : th. d'opérations, unicité de la limite, toute fonction ayant une limite est bornée au voisinage de $\ldots$, caractérisation séquentielle de la limite, composition des limites. En dimensions finies, indépendance de la définition de fonction ayant une limite vis-à-vis des normes choisies. Extension aux cas des limites infinies, des limites en $+\infty$ ou $-\infty$, des limites quand $||x||$ tend vers l'infini.

c) Fonctions continues, propriétés usuelles. Cas de la dimension finie. Fonctions lipschitziennes, exemple : la distance à une partie, caractérisation des points adhérents grâce à cette distance. Cas particuliers des applications linéaires, différentes caractérisations des applications linéaires continues. Cas particulier en dimension finie. Norme subordonnée (ou norme triple) d'une application linéaire continue. La norme subordonnée est une norme sous-multiplicative. Norme subordonnée d'une matrice carrée.

2 Séries numériques ou vectorielles

a) Vocabulaire et généralités : série, somme partielle, série convergente, somme de la série, reste partiel. Opérations sur les séries convergentes. Exemples fondamentaux : séries géométriques et séries de Riemann.

b) Condition nécessaire de convergence, divergence grossière. Lien entre convergence d'une suite et de sa série téléscopique associée.

c) Séries à termes positifs : comparaison entre séries, régle de d'Alembert, sommation des relations de comparaison, théorème de Césaro,

d) Séries absolument convergentes dans un espace de dimension finie. Extension des résultats sur les sommations des relations de comparaison en $O(\ )$ ou $o(\ )$. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes dans une algèbre de dimension finie.

e) Séries alternées.

Savoir faire :

— démontrer la règle de d'Alembert (prop. 4) quand $\ell < 1$

— démontrer le 3ème point du th. 1 sur les séries à termes positifs (si $u \sim v$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature)

— démontrer le critère spécial des séries alternées