Soit u une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que $u_n s_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Q 1. Montrez que la série $\sum u_n$ diverge.

Q 2. Montrez que $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} s_{n-1}$, puis que la suite $(s_n^2 - s_{n-1}^2)$ converge vers 2.

Q 3. Déduisez-en un équivalent simple de u_n.

Q 4. Pour quelles valeurs de α réel la série $\sum u_n^\alpha$ converge-t-elle ?

Exercice hebdomadaire 1 - Corrigé

Q 1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc comme $s_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{u_n}$, on en déduit que $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui contredit la convergence de la série $\sum u_n$.

Conclusion : la série $\sum u_n$ diverge et comme il s'agit d'une série à termes positifs, alors $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Q 2. D'après ce qui précède, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{s_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or $\dfrac{s_n}{s_{n-1}} = \dfrac{s_{n-1}+u_n}{s_{n-1}} = 1 + \dfrac{u_n}{s_{n-1}}$.

Par opérations sur les limites, on en déduit que $\dfrac{s_n}{s_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Puis $s_n^2 - s_{n-1}^2 = (s_n - s_{n-1})(s_n + s_{n-1}) = u_n(s_n + s_{n-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \times (2s_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

Q 3. D'après le th. de Cesaro, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(s_{k+1}^2 - s_k^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, c'est-à-dire $\dfrac{s_n^2 - s_0^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

Comme $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a alors $\dfrac{s_n^2 - s_0^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{s_n^2}{n}$, donc il vient $s_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n$.

Puis $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{s_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Q 4. $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^{\alpha/2}n^{\alpha/2}}$ donc par comparaison avec une série de Riemann, la série à termes positifs $\sum u_n^\alpha$ converge si et s.si $\dfrac{\alpha}{2} > 1$, *i.e.* $\alpha > 2$.