Equivalences des normes en dimension finie

13 septembre 2022

On se propose de démontrer dans ce document le théorème suivant.

Théorème 1. *Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

On commence par un lemme classique.

Lemme 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.*

Alors f possède un minimum sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On rappelle la définition de limite $+\infty$ en $+\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \geqslant B \quad f(x) \geqslant A$$

On spécialise A en $f(0)$: il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant B$, $f(x) \geqslant f(0)$.

On peut remarquer qu'on peut choisir $B > 0$. En effet, si B est déjà strictement positif, alors c'est bon, on a ce qu'on veut ; si $B \leqslant 0$, alors pour tout $x \geqslant 1$, on a $x \geqslant 1 \geqslant B$, donc $f(x) \geqslant A$, on peut donc remplacer B par 1, ça marche encore.

De même, il existe $C < 0$ tel que pour tout $x \leqslant C$, $f(x) \geqslant f(0)$.

La fonction f est continue sur le **segment** $[C, B]$ donc d'après le th. des bornes atteintes, elle admet un minimum sur ce segment, c'est-à-dire il existe un réel $a \in [C, B]$ tel que pour tout $x \in [C, B]$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
— si $x \in [C, B]$, on a directement $f(x) \geqslant f(a)$;
— si $x > B$, alors $f(x) \geqslant f(0)$, mais comme $0 \in [C, B]$, on a aussi $f(0) \geqslant f(a)$, donc finalement $f(x) \geqslant f(a)$;
— si $x < C$, alors $f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(a)$, donc encore une fois $f(x) \geqslant f(a)$.

Conclusion : dans tous les cas, $f(x)$ est minoré par $f(a)$ donc f possède un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en a. •

Un second lemme pour continuer.

Lemme 2. *Soit N une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit alors l'application $N' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la façon suivante :*

$$\textit{pour tout } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ N'(a_1, \dots, a_n) = \min\{N(a_1, \dots, a_n, t) \ / \ t \in \mathbb{R}\}.$$

On montre que l'application N' est bien définie et qu'elle est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = N(a_1, \dots, a_n, t)$.

On vérifie d'abord que f est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $(t, u) \in \mathbb{R}^2$, d'après l'inégalité triangulaire (la deuxième inégalité), on a

$$|f(t) - f(u)| \leqslant N\Big((a_1, \dots, a_n, t) - (a_1, \dots, a_n, u)\Big) = N\Big((0, \dots, 0, t - u)\Big) = |t - u| N(0, \dots, 0, 1)$$

Ceci prouve que f est lipschitzienne donc continue sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, on vérifie que f a pour limites $+\infty$ en les infinis. En effet, toujours d'après l'inégalité triangulaire, on a $(0, \dots, 0, t) = (-a_1, \dots, -a_n, 0) + (a_1, \dots, a_n, t)$ donc

$$N(0, \dots, 0, t) \leqslant N(-a_1, \dots, -a_n, 0) + N(a_1, \dots, a_n, t) = N(a_1, \dots, a_n, 0) + N(a_1, \dots, a_n, t)$$

autrement dit

$$|t| N(0, \dots, 0, 1) - N(a_1, \dots, a_n, 0) \leqslant f(t)$$

or $N(0, \dots, 0, 1) > 0$ donc par th. d'encadrement, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = +\infty$.

D'après le lemme 1, la fonction f possède donc un minimum, donc cela définit parfaitement $N'(a_1, \dots, a_n)$.

Il reste à montrer les trois propriétés des normes sur N'.

D'abord, N' est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Ensuite, soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, si $N'(a_1, \dots, a_n) = 0$, alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $N(a_1, \dots, a_n, t) = 0$ (le minimum de f est atteint !), or N est une norme, donc $(a_1, \dots, a_n, t) = (0, \dots, 0, 0)$ donc $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$. L'axiome de séparation est bien satisfait.

Puis, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

— si $\lambda \neq 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $N'\Big(\lambda(a_1, \dots, a_n)\Big) \leqslant N(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n, t) = |\lambda| N(a_1, \dots, a_n, \frac{t}{\lambda})$

donc en particulier, pour la valeur de t telle que $N(a_1, \dots, a_n, \frac{t}{\lambda}) = N'(a_1, \dots, a_n)$, on a l'inégalité

$$N'\Big(\lambda(a_1, \dots, a_n)\Big) \leqslant |\lambda| N'(a_1, \dots, a_n)$$

mais on a aussi de même

$$N'(a_1, \dots, a_n) = N'\Big(\frac{1}{\lambda}(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\Big) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| N'\Big((\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)\Big) = \frac{1}{|\lambda|} N'\Big(\lambda(a_1, \dots, a_n)\Big)$$

donc comme $|\lambda| > 0$, on peut conclure

$$N'\Big(\lambda(a_1, \dots, a_n)\Big) = |\lambda| N'(a_1, \dots, a_n)$$

— si $\lambda = 0$,

$$N'\Big(\lambda(a_1, \dots, a_n)\Big) = N'(0, \dots, 0) = 0 = |\lambda| N'(a_1, \dots, a_n)$$

L'axiome d'homogénéité est satisfait.

Enfin, soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe t et u réels tels que

$$N'(a_1, \dots, a_n) = N(a_1, \dots, a_n, t) \text{ et } N'(b_1, \dots, b_n) = N(b_1, \dots, b_n, u)$$

donc

$$N'\Big((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)\Big) \leqslant N(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, t + u) \leqslant N(a_1, \dots, a_n, t) + N(b_1, \dots, b_n, u)$$

autrement dit

$$N'\Big((a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)\Big) \leqslant N'(a_1, \dots, a_n) + N'(b_1, \dots, b_n)$$

L'axiome d'inégalité triangulaire est aussi satisfait.

Au total, N' est une norme sur $\mathbb{R}^n$. •

De même, on montre que l'application $N'' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$\text{pour tout } (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ N''(a_2, \dots, a_{n+1}) = \min\{N(t, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

est aussi une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Maintenant, la preuve du théorème.

Démonstration. On pose $\mathscr{P}(n)$ le prédicat

« si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\infty \leqslant \alpha N(v)$ ».

Pour $n = 1$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ et la norme $\| \ \|_\infty$ est en fait la valeur absolue. Si N est une norme sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $N(x) = N(x.1) = |x| N(1)$ donc N est proportionnelle à la valeur absolue, ce qui est mieux que ce qui était attendu. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors soit N une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

D'après le lemme 2, les normes N' et N'' associées comme précédemment sont des normes sur $\mathbb{R}^n$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $(\alpha', \alpha'') \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\infty \leqslant \alpha' N'(v)$ et $\|v\|_\infty \leqslant \alpha'' N''(v)$ (on parle ici de la norme infinie de $\mathbb{R}^n$).

Soit $w = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, alors $\|(a_1, \dots, a_n)\|_\infty \leqslant \alpha' N'(a_1, \dots, a_n)$,

or $N'(a_1, \dots, a_n) \leqslant N(w)$ par définition de N' donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|a_i| \leqslant \alpha' N(w)$.

De même, $\|(a_2, \dots, a_{n+1})\|_\infty \leqslant \alpha'' N''(a_2, \dots, a_n) \leqslant \alpha'' N(a_1, \dots, a_n)$, donc pour tout $i \in [\![2, n+1]\!]$, $|a_i| \leqslant \alpha'' N(w)$.

Donc pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $|a_i| \leqslant \alpha N(w)$ en posant $\alpha = \max(\alpha', \alpha'') > 0$,

ce qui revient à dire $\|w\|_\infty \leqslant \alpha N(w)$ (ici il s'agit de la norme infinie de $\mathbb{R}^{n+1}$).

Ceci étant vrai pour tout $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a donc prouvé que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.
D'après la récurrence précédente, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_\infty \leqslant \alpha N(v)$.
De plus, en écrivant $v = (a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ où la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on en déduit par inégalité triangulaire que $N(v) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} N(a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |a_i| N(e_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)\right) \|v\|_\infty$.
Donc en posant $\beta = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} N(e_i)} > 0$, on a bien trouvé deux constantes strictement positives telles que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\beta N(v) \leqslant \|v\|_\infty \leqslant \alpha N(v)$.
Ceci prouve que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes à la norme infinie, donc sont équivalentes entre elles.
Pour conclure, il suffit de remarquer que tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$, donc ce qui a été montré pour les espaces $\mathbb{R}^n$ reste valable pour n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie. •