ESPACES VECTORIELS NORMÉS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

+1)** Soit u une suite réelle bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \{u_p \ / \ p \geqslant n\}$, $a_n = \inf U_n$ et $b_n = \sup U_n$.

a) Justifiez l'existence des suites a et b et étudiez leur monotonie, ainsi que leur convergence.

b) Montrez que u converge si et s.si a et b ont la même limite.

Note culturelle : la limite de a s'appelle la limite inférieure de u, notée $\underline{\lim}\, u$ et celle de b est la limite supérieure, notée $\overline{\lim}\, u$.

+*2) Montrez que les applications N introduites ci-dessous sont des normes :

a) si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, l'application N définie sur $\mathbb{R}^n$ par $N(X) = \|A\,X\|_2$;

b) sur $E = C^1\big([a,b],\mathbb{K}\big)$, $\quad N(f) = |f(a)| + \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\, dt$;

c) pour des réels $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ fixés, l'application N définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $N(P) = \displaystyle\max_{k \in [\![0,n]\!]} |P(\alpha_i)|$.

***3)** Sur $E = \mathbb{R}^2$, on définit

$$\|(x,y)\| = \max\big(|x|,\ |x + 2\,y|\big).$$

Démontrez que $\|\ \|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$. Représentez graphiquement la boule-unité.

+4)** Les normes définies dans l'exercice 2 sont-elles équivalentes à la norme $\|\ \|_\infty$, la norme $\|\ \|_1$, la norme $\|\ \|_2$?

+*5) Soit $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$. Montrez que les suites $(\sin(n\theta))$ et $(\cos(n\theta))$ divergent.

+*6) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la suite (A^k) converge. Montrez que sa limite est la matrice d'un projecteur.

****7)** Cet exercice prolonge le premier.

Soit u une suite vérifiant la propriété $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad p \geqslant n \geqslant N \Rightarrow |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$.

Montrez que u est bornée, puis en vous servant des suites a et b définies comme ci-dessus, montrez que u converge.

Note culturelle : on dit que u est une suite de Cauchy et on a donc montré que toute suite de Cauchy converge.

+8)** Norme ℓ^1

On note ℓ^1 l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que la série $\sum u_k$ soit absolument convergente, et on pose :

$$\forall u = (u_k) \in \ell^1 \quad N(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

a) Justifiez que ℓ^1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Montrez que N est une norme sur ℓ^1. *On notera désormais* $\|u\|_1$ *pour* $N(u)$.

c) Justifiez que, si $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ℓ^1 convergeant vers la suite $a \in \ell^1$ pour la norme 1, alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k^{(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_k.$$

d) Montrez que la réciproque est fausse.
Indication : on pourra étudier l'exemple où, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $u_k^{(n)} = \exp(-\frac{k}{n+1})$.

+*9) Soit E le $\mathbb{C}$-e.v. des suites bornées muni de la norme infinie.

Montrez que les applications $u \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ et $u \mapsto \dfrac{u_0 + \ldots + u_n}{n+1}$ sont des applications continues de E dans E.

+10)** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{i,j})$, on pose $\|A\| = \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a) Montrez que $\|\ \|$ est une norme sur E.

b) Montrez que l'application $A \mapsto A^{\mathrm{T}}$ est un endomorphisme continu et déterminez sa norme subordonnée.

****11)** Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose $A = \{f \in E \ / \ f \geqslant 0\}$ et pour $f \in E$, $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f|$.

a) Montrez que $\| \ \|_1$ est une norme sur E.

b) Déterminez $\mathring{A}$ dans $(E, \| \ \|_\infty)$, puis dans $(E, \| \ \|_1)$.

c) On pose $D = D^1([0,1],\mathbb{R})$, sous-espace des fonctions dérivables, et P le sous-espace des fonctions polynômes. Déterminez les intérieurs de P et D dans $(E, \| \ \|_\infty)$.

****12)** Cet exercice prolonge le précédent, les notations sont reprises.

Soit $u : E \to E$ qui à toute fonction f de E associe sa primitive qui s'annule en 0. Vérifiez que u est un endomorphisme de E.

Est-il continu de $(E, \| \ \|_?)$ dans $(E, \| \ \|_?)$ (vous étudierez les 4 possibilités). Quand c'est le cas, déterminez la norme subordonnée de u.

+13)** Soit $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \ / \ f(0) = f(1) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $||f|| = \sup\limits_{[0,1]} |f'|$.

a) Montrez que $|| \ ||$ est une norme sur E.

b) Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f$. Montrez que φ est continue et déterminez $|||\varphi|||$.

+14)** Soit E un e.v.n., F un s.e.v. de E.

a) Montrez que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$ et $\overline{F}$ est un s.e.v de E.

b) Montrez que si F est un hyperplan, alors F est fermé ou dense dans E.

+15)** Soit E un e.v.n., A une partie de E.

a) Montrez que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

b) Montrez que la frontière de A et celle du complémentaire de A sont égales.

c) Montrez que la frontière de A est un fermé. Montrez que si A est ouverte ou fermée, la frontière de A est d'intérieur vide.

***16)** Une intersection d'ouverts est-elle toujours un ouvert ? Une réunion de fermés est-elle toujours un fermé ?

+*17) Montrez que si A est une partie convexe d'un e.v.n. E, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $\mathring{A}$.

****18)** Soit E un e.v.n., A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est un point d'accumulation de A quand il existe une suite injective de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. On dit que x est un point isolé de A quand il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A = \{x\}$.

a) Exemples. On pose $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ dans $\mathbb{R}$: montrez que tous les points de A sont isolés, que le seul point d'accumulation de A est 0 et que A n'est pas fermé. On pose $B = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \ / \ (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$: quels sont les points d'accumulation de B ?

b) Montrez que x est un point d'accumulation si et s.si pour tout $r > 0$, $B(x,r) \cap A$ est un ensemble infini.

c) On note A' l'ensemble des points d'accumulation de A, A^d l'ensemble des points isolés dans A. Montrez que $\overline{A} = A' \sqcup A^d$.

d) Montrez A' est un fermé.

****19)** Soit E, F deux e.v.n. et $f : E \to F$. Montrez l'équivalence entre les propositions :

▷ f est continue

▷ $\forall A \in \mathscr{P}(E) \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

▷ $\forall B \in \mathscr{P}(F) \quad f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subset \overbrace{f^{-1}(B)}^{\circ}$

+20)** Soit A, B deux fermés disjoints d'un e.v.n. E.

a) Montrez que $\{x \in E \ / \ d(x,A) > d(x,B)\}$ est un ouvert.

b) Montrez qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

+21)** Soit A une partie d'un e.v.n. E. Pour $r > 0$, on pose $V(A,r) = \{x \in E \ / \ d(x,A) < r\}$.

Montrez que $V(A,r)$ est un ouvert de E et $\displaystyle\bigcap_{r>0} V(A,r) = \overline{A}$.

+**22)** Soit E un e.v.n. réel, K un compact de E, $k \in [0,1[$ et $f : K \to K$ telle que $\forall (x,y) \in K^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant k \|x - y\|$.

Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que u converge et que sa limite est l'unique point fixe de f.

23) Soit E un e.v.n., A une partie non vide de E. On appelle diamètre de A, noté $\delta(A)$, la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des $\|x - y\|$ quand $(x,y) \in A^2$.

a) Montrez que $\delta(A) < +\infty$ si et s.si A est bornée.

b) Quel est le diamètre d'une boule ?

c) Montrez que si A est compacte, alors il existe $(a,b) \in A^2$ tel que $\delta(A) = \|a - b\|$. Est-ce encore vrai si on suppose seulement A bornée ? A fermée ?

+**24)** Soit E un e.v.n., A, B deux parties non vides de E. On pose $d(A,B) = \inf\limits_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\|$, appelé distance de A à B.

a) Montrez que si $d(A,B) > 0$, alors A et B sont disjointes, mais que la réciproque est fausse.

b) Montrez que si A et B sont compactes, alors $d(A,B)$ est en fait un minimum plutôt qu'une borne inférieure.

c) Montrez que ce résultat reste vrai si E est de dimension finie, l'une des deux parties est compacte et l'autre fermée.

d) Est-ce encore vrai si on suppose seulement A et B fermées ?

+**25)** Soit E un e.v.n. de dimension finie, et $(B_n = \overline{B}(a_n, r_n))$ une suite de boules fermées, décroissante pour l'inclusion, telle que $r_n \longrightarrow 0$.

a) Montrez que la suite (a_n) admet une sous-suite convergeant vers un vecteur a.

b) Montrez que $a_n \longrightarrow a$.

c) Montrez que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{a\}$.

26) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Montrez que l'ensemble des projecteurs est fermé dans $\mathscr{L}(E)$. Est-il borné ? Compact ? Connexe par arcs ?

27) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\varepsilon > 0$. On pose $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |f(x) - y| \leqslant \varepsilon\}$.

a) Montrez que E est connexe par arcs.

b) Montrez que si f est une fonction affine, alors E est une partie convexe.

c) Montrez que la réciproque est vraie.

28) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, H un hyperplan de E.

a) Montrez que $E - H$ possède deux composantes connexes par arcs qui sont ouvertes.

b) Soit B une partie de H telle que $B \neq H$. Montrez que $E - B$ est connexe par arcs.

29) Soit E un e.v.n., A, B deux parties de E telles que B est connexe par arcs et B rencontre à la fois A et $E - A$.

Montrez que B rencontre la frontière de A.

30) Deux parties d'e.v.n. sont dites homéomorphes quand il existe une bijection continue de l'une dans l'autre telle que la réciproque soit aussi continue.

a) Montrez que tout intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

b) Montrez qu'un intervalle qui contient l'une de ses bornes réelles ne peut pas être homéomorphe à $\mathbb{R}$.

c) Montrez que toute boule ouverte d'un e.v.n. E est homéomorphe à E.

d) Montrez qu'aucune boule fermée de E n'est homéomorphe à E.

***31)** Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, autre que $\{0\}$.

a) Montrez que $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$ existe.

b) Montrez que $G = a\mathbb{Z}$ si $a > 0$ ou G est dense dans $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

c) On pose $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ (G est le sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$) et $r = \sqrt{2} - 1$. En considérant la suite (r^n), montrez que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de périodes 1 et $\sqrt{2}$. Que peut-on dire de f ?

d) Soit a, b deux réels distincts et non nuls, on pose $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Montrez que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puis que G est dense dans $\mathbb{R}$ si et s.si $\dfrac{a}{b}$ est un rationnel.

Application : montrez que les ensembles $\{\cos n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin n \;/\; n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

*****32)** Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $||f|| = \sup\limits_{[0,1]} |f|$. On note $B'(0,1)$ la boule-unité fermée.

Soit (t_n) une suite injective à valeurs dans $[0,1]$. Pour $f \in E$, on pose $L(f) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{f(t_n)}{2^n}$.

a) Montrez que L est une forme linéaire continue sur E.

b) Déterminez $K = \sup\limits_{f \in B'(0,1)} |L(f)|$.

c) Montrez que si la suite (t_n) converge ou si elle est dense dans $[0,1]$, K n'est pas atteinte.

d) Donnez un exemple de suite (t_n) pour laquelle K est atteinte. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur la suite t pour que K soit atteinte.

*****33)** Soit E un e.v.n., u une forme linéaire non nulle, continue sur E. On pose $H = \operatorname{Ker} u$ et $K = \sup\limits_{x \in E - \{0\}} \dfrac{|u(x)|}{||x||}$.

a) Justifiez l'existence de K.

b) Montrez que pour tout $a \in E$, $d(a,H) = \dfrac{|u(a)|}{K}$.

Oraux de concours

1) CCMP Soit E un e.v.n. réel, B sa boule-unité ouverte. Montrez que E et B sont homéomorphes (*i.e.* il existe une bijection de E dans B qui est continue et dont la réciproque est aussi continue).

2) CCMP Soit E un e.v.n. réel, C, D deux parties de E telles que $C \subset D \subset \overline{C}$ et C convexe. Montrez que que D est connexe par arcs.

3) CCMP Soit E un e.v.n. réel, K un compact de E et $f : K \to K$ telle que

$$\forall (x,y) \in K^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

a) Montrez que f possède un unique point fixe.

b) Soit u la suite définie par u_0 quelconque dans K et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrez que u converge vers le point fixe de f.

4) CCMP Soit u une suite réelle bornée telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Montrez que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle.

5) CEN Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, tel que pour tout $g \in G$, il existe un voisinage V de g tel que $G \cap V = \{g\}$.

a) Montrez que pour tout compact K de $\mathbb{C}^*$, $G \cap K$ est fini.

b) Montrez que $G \cap \mathbb{U}$ est un groupe cyclique.

c) On suppose que G n'est pas contenu dans $\mathbb{U}$. Soit $A = \{|z| \ / \ z \in G \text{ et } |z| > 1\}$. Montrez que A possède un plus petit élément. Déduisez-en G.

6) CEN Soit E, F deux e.v.n. de dimensions finies, $f : E \to F$. On dit que f est propre quand pour tout compact K de F, $f^{-1}(K)$ est un compact de E.

a) Montrez que si f est propre, alors l'image d'un fermé de E est un fermé de F.

b) Montrez que f est propre si et s.si $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$.

7) X Soit $n \in \mathbb{N}^*$, U_n l'ensemble des polynômes réels unitaires de degré n et A_n l'ensemble des polynômes de U_n qui sont simplement scindés (*i.e.* ayant n racines réelles distinctes).

a) Montrez que A_n est un ouvert de U_n.

b) Déterminez l'adhérence de A_n.