À rendre le lundi 2 septembre 2024

Pour toute question : `laurent.walbron@laposte.net`, 06 68 83 35 32

Problème 1 - Une pièce et une urne

On étudie l'expérience aléatoire suivante : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que l'un des événements suivants soit réalisé :

— soit on obtient "pile" ;

— soit on a effectué n lancers.

On appelle X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de "face" obtenus.

Puis dans une urne, on met une boule blanche et X_n boules noires et on effectue le tirage d'une boule. On s'intéresse à l'événement B_n « on obtient la boule blanche ».

Q 1.

a) Déterminez la loi de la v.a.r. X_n.

b) On pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^{k+1}}$. Montrez que $2s_n = s_n + 1 - \dfrac{n+1}{2^n}$ sans faire de récurrence (indication : $k = (k-1) + 1$)

c) Déduisez-en l'espérance de X_n.

Q 2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}$ l'événement « on obtient la boule blanche après avoir obtenu k fois "face" ».

a) Si $k \leqslant n-1$, calculez $\mathbf{P}(B_{n,k})$

b) Que vaut $\mathbf{P}(B_{n,n})$?

Q 3. Déterminez une expression explicite de $\mathbf{P}(B_n)$.

Q 4.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

b) Déterminez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n)$. Interprétez ce résultat pour de « grandes » valeurs de n.

Problème 2 - Calcul d'une intégrale

I. Limite d'une somme d'intégrales

On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Q 1.

a) Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

b) Exprimez la somme S_n à l'aide d'une intégrale.

Q 2. Vérifiez que, pour tout réel $t \in]0, 2\pi[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$.

Q 3. On considère la fonction g définie par $\begin{cases} g(t) = \dfrac{t^2}{\sin\frac{t}{2}} & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ g(0) = 0. \end{cases}$

Montrez que g est de classe C^1 sur $[0, 2\pi[$.

Q 4.

a) Vérifiez alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t$.

b) Justifiez l'existence de $M_1 = \displaystyle\sup_{x\in[0,\pi]} |g'(x)|$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left|\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi M_1}{n+\frac{1}{2}}$$

d) Déduisez-en que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.

II. Calcul d'une intégrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On vérifie aisément que f est continue sur $[0,1]$. L'objet de la suite du problème est le calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_k(x) = x^k \ln x \text{ si } x > 0 \\ f_k(0) = 0. \end{cases}$

Q 5. Pour $k \geqslant 2$, montrez que f_k est dérivable sur $[0,1]$ et exprimez sa dérivée à l'aide de f_{k-1}.

Q 6. Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculez l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$.

Q 7. Pour tout $x \in]0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f_k(x)$ en fonction de $f(x)$ et x^n.

Q 8. Justifiez l'existence de $M = \displaystyle\sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|I - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k\right| \leqslant M \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.

Q 9. Déduisez-en la valeur de I.

Problème 1

Q 1.

a) D'abord il est clair que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k l'événement « on obtient 'pile' au k-ème lancer ».

Alors si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\{X_n = k\} = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_k \cap P_{k+1}$: on suppose que les lancers sont indépendants, donc les événements $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ le sont,

donc $\mathbf{P}(X_n = k) = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\overline{P}_i) \times \mathbf{P}(P_{k+1}) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ puisque la pièce est supposée équilibrée.

Enfin, si $k = n$, alors $\{X_n = n\} = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_n$, donc de même $(X_n = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

b) $2s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(k-1)+1}{2^k}$

donc $2s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{k-1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2^k} = \sum_{j=0}^{n-2} \dfrac{j}{2^{j+1}} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}}$

donc $2s_n = s_n - \dfrac{n-1}{2^n} + 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} = s_n + 1 - \dfrac{n-1}{2^n} - \dfrac{2}{2^n} = s_n + 1 - \dfrac{n+1}{2^n}$.

c) $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{2^{k+1}} + \dfrac{n}{2^n} = s_n + \dfrac{n}{2^n}$ donc $E(X_n) = +1 - \dfrac{n+1}{2^n} + \dfrac{n}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

Q 2.

a) $B_{n,k} = \{X_n = k\} \cap B_n$, donc d'après la formule des probabilités composées, $\mathbf{P}(B_{n,k}) = \mathbf{P}_{X_n=k}(B_n) \times \mathbf{P}(X_n = k)$.

On connaît $\mathbf{P}(X_n = k) = \dfrac{k}{2^{k+1}}$ et si l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé, alors l'urne contient k boules noires et une boule blanche, donc (avec l'hypothèse que les tirages sont équiprobables) $\mathbf{P}_{X_n=k}(B_n) = \dfrac{1}{k+1}$.

Donc $\mathbf{P}(B_{n,k}) = \dfrac{1}{(k+1)2^{k+1}}$.

b) De même, $\mathbf{P}(B_{n,n}) = \dfrac{1}{(n+1)2^n}$.

Q 3. $B_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} B_{n,k}$ (car les événements $\{X_n = k\}$ forment un système complet d'événements), donc $\mathbf{P}(B_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \dfrac{1}{(n+1)2^n}$.

Q 4.

a) Par récurrence : soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \dfrac{t^n}{1-t}\,dt$.

Si $n = 1$, alors d'une part $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k2^k} = \dfrac{1}{2}$ et d'autre part, $\ln 2 - \int_0^{1/2} \dfrac{t}{1-t}\,dt = \ln 2 + \int_0^{1/2} \dfrac{t}{t-1}\,dt$

$= \ln 2 + \int_0^{1/2} \dfrac{(t-1)+1}{t-1}\,dt = \ln 2 + \dfrac{1}{2} + \int_0^{1/2} \dfrac{1}{t-1}\,dt = \ln 2 + \dfrac{1}{2} + [\ln|t-1|]_0^{1/2} = \ln 2 + \dfrac{1}{2} + (\ln \dfrac{1}{2} - 0) = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors d'une part, $\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k2^k} + \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \dfrac{t^n}{1-t}\,dt + \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

D'autre part, $\int_0^{1/2} \dfrac{t^n}{1-t}\,dt = \int_0^{1/2} \dfrac{t^n(1-t) + t^{n+1}}{1-t}\,dt = \int_0^{1/2} t^n\,dt + \int_0^{1/2} \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,dt = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \int_0^{1/2} \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,dt$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k2^k} = \ln 2 - \left(\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \int_0^{1/2} \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,dt \right) + \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \dfrac{t^{n+1}}{1-t}\,dt$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $t \in [0, 1/2]$, on a l'inégalité $0 \leqslant \dfrac{1}{1-t} \leqslant 2$, donc $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{1/2} 2t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)2^n}$.

Donc d'après le th. d'encadrement, $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\mathbf{P}(B_n)$ tend vers $\ln 2$.

Quand n est « grand », on peut approcher $\mathbf{P}(B_n)$ par $\ln 2$, autrement dit quand on est prêt à attendre longtemps le premier lancer qui donne 'pile', on a environ 7 chance sur 10 de tirer la boule blanche.

Problème 2

I.

Q 1.

a) Par une double intégration par parties, les fonctions mises en jeu étant largement de classe C^1.

b) Par linéarité de l'intégrale, on obtient $S_n = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \cos(nt)\right)\,\mathrm{d}t$

Q 2. Plusieurs façons de le montrer : soit directement en passant par les complexes et les sommes de termes de suites géométriques, soit par récurrence.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \sum_{k=1}^{n} \Re(e^{ikt}) = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right)$: on reconnaît la somme des termes de la suite géométrique de raison e^{ikt}.

Or comme $t \in\,]0, 2\pi[$, $e^{ikt} \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}$.

Puis on pense à « l'astuce » ! $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it}\frac{e^{int/2}(e^{-int/2}-e^{int/2})}{e^{it/2}(e^{-it/2}-e^{it/2})} = e^{it}e^{i(n-1)t/2} \times \frac{\sin n\frac{t}{t}}{\sin\frac{t}{2}} = e^{i(n+1)t/2} \times \frac{\sin n\frac{t}{t}}{\sin\frac{t}{2}}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \cos{(n+1)}\frac{t}{2}\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$. Puis on utilise une formule de trigonométrie pour transformer le produit du sinus et du cosinus en une somme : $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n\frac{t}{2} + (n+1)\frac{t}{2}) + \sin(n\frac{t}{2} - (n+1)\frac{t}{2})}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(nt+\frac{t}{2}) - \sin(\frac{t}{2})}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Q 3. g est de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$ d'aprés les th. d'opération sur les fonctions de classe C^1.

$g(t) \sim \dfrac{t^2}{t/2} \sim 2t$ quand t tend vers 0, donc $\lim\limits_{0} g = 0 = g(0)$: g est donc continue en 0. Donc g est continue sur $[0, 2\pi[$.

Pour tout $t \in]0, 2\pi[$, $g'(t) = \dfrac{2t\sin\frac{t}{2} - \frac{t^2}{2}\cos\frac{t}{2}}{\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{\frac{t^2}{4} + o(t^2)} \sim 2$ donc g' a une limite réelle en 0.

On récapitule : g est continue sur $[0, 2\pi[$, de classe C^1 sur $]0, 2\pi[$ et g' a une limite réelle en 0, donc d'aprés le th. de prolongement C^1, g est de classe C^1 sur $[0, 2\pi[$.

Q 4.

a) $S_n = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} t^2\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(nt)\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2\left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right)\,\mathrm{d}t$

$= -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{12}$

b) g est de classe C^1 sur $[0, \pi]$, donc g' est continue sur le segment $[0, \pi]$, d'où l'existence de M_1.

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t = \left[g(t) \times \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} g'(t) \times \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$ car les fonctions $u = g$ et $v : t \mapsto \dfrac{-\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}$ sont de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

Donc $\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} g'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t$, car $g(0)=0$ et $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = 0$

Puis d'aprés l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi}\left|g'(t)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\right|\,\mathrm{d}t$$

Or $\left|g'(t)\times\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\right| \leqslant M_1\times 1 = M_1$, donc par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\left|\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi M_1}{n+\frac{1}{2}}$$

d) D'aprés le th. d'encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\,\mathrm{d}t = 0$, donc d'aprés les th. d'opération sur les limites, on obtient $\lim S_n = \dfrac{\pi^2}{12}$.

II.

Q 5. Toutes les fonctions f_k sont toutes continues sur $[0,1]$.

De plus, elles sont de classe C^1 sur $]0,1]$ d'aprés les th. d'opérations sur les fonctions de classe C^1 et pour tout $x\in]0,1]$, $f_k'(x) = kf_{k-1}(x)+x^{k-1}$.

Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_k'(x) = 0$ donc comme précédemment, le th. de prolongement C^1 permet d'affirmer que les fonctions f_k (pour $k\geqslant 2$) sont toutes de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f_k'(0) = 0 = kf_{k-1}(0)+0^{k-1}$.

Donc finalement pour tout $x\in[0,1]$, $f_k'(x) = kf_{k-1}(x)+x^{k-1}$.

Q 6. Pour tout $x\in[0,1]$, $f_k(x) = \dfrac{1}{k+1}(f_{k+1}'(x)-x^k)$ en remplaçant k par $k+1$ dans la relation précédente.

Donc $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\int_0^1 (f_{k+1}'(x)-x^k)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\int_0^1 f_{k+1}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{k+1}\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle = \frac{1}{k+1}\Big[f_{k+1}(x)\Big]_0^1 - \frac{1}{(k+1)^2} = -\frac{1}{(k+1)^2}.$

Q 7. Pour $x>0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^k\ln x = x\ln x\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}$

$\displaystyle = x\ln x.\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = x\ln x\frac{1-(-x)^n}{1+x} = f(x)+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}\ln x}{1+x}.$

Ceci est vrai aussi si $x=0$ $(0=0)$.

Q 8. $\displaystyle I-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 f_k(x)dx$

$\displaystyle = \int_0^1\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f_k(x)\right)dx = \int_0^1 (-1)^n\frac{x^{n+1}\ln x}{1+x}dx$

donc $\displaystyle\left|I-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k\right| = \left|(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1\left|\frac{x^{n+1}\ln x}{1+x}\right|\,\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{x^{n+1}|\ln x|}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\left|\frac{x\ln x}{1+x}\right|\,\mathrm{d}x =$ $\displaystyle\int_0^1 x^n|f(x)|\,\mathrm{d}x$

or pour tout $x\in[0,1]$, $|f(x)|\leqslant M$, donc $\displaystyle\int_0^1 x^n|f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n.M\,\mathrm{d}x = M\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$

Q 9. D'aprés la question précédente, on a : $\displaystyle\left|I-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k\right| \leqslant \frac{M}{n+1}$

ce qui s'écrit encore : $\displaystyle\left|I-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{(k+1)^2}\right| \leqslant \frac{M}{n+1}$

Donc d'aprés le th. d'encadrement, on en déduit que $I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{p=2}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2}$ en faisant le changement d'indices $p = k+1$.

Sous cette forme, on reconnaît $S_{n+1} - 1$, qui a pour limite $\frac{\pi^2}{12} - 1$ d'aprés la partie précédente.

Donc $I = \frac{\pi^2}{12} - 1$.