Ce sujet est composé de quelques exercices indépendants et d'un problème. Il est sans doute **trop long** pour être traité dans sa totalité. Alors n'essayez pas de tout faire, en revanche visez **l'excellence de vos réponses**.

Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et repérez les questions qui vous semblent faciles ou presque pour vous. Ensuite attaquez-vous au sujet dans l'ordre que vous voulez, cependant évitez de papillonner. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour faire les suivantes en l'indiquant sur votre copie par égard pour le correcteur. En fin d'épreuve, les questions que vous aviez repérées comme faciles devraient avoir été traitées, sauf si elles n'étaient pas si faciles finalement.

Écrivez lisiblement, soignez la présentation, efforcez-vous de faciliter la vie du correcteur : un correcteur agacé aura moins tendance à lâcher les points. Rappelez-vous que vos réponses seront lues au maximum trois fois : si à la fin de la troisième lecture, le correcteur n'est pas convaincu par votre travail, tant pis pour vous ! Enfin, **il est hors de question d'obliger le correcteur à refaire votre raisonnement ou vos calculs** : votre rédaction doit comporter suffisamment de détails pour que le correcteur lise sans trop réfléchir.

Exercice

Résolvez l'équation différentielle $y'' - 6y' + 5y = 8e^x$. Précisez la solution telle que $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$.

Exercice

Résolvez l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$\arccos(2x) - \arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$$

Problème 1 - Étude d'une fonction

On définit la fonction f en posant $f(x) = \sqrt{x^2 + x + \mathrm{e}^{-x} - 1}$.

Question 1) Montrez que la fonction $\varphi : x \mapsto x^2 + x + \mathrm{e}^{-x}$ a pour valeur minimale 1 sur $\mathbb{R}$.

Question 2)

a) Précisez l'ensemble de définition de f. Sur quel ensemble est-on sûr que f est dérivable ?

b) Calculez le dév. limité de φ en 0 à l'ordre 2. Déduisez-en la dérivabilité à droite et à gauche de f en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Question 3)

a) Donnez un équivalent simple de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Dressez le tableau de variations de f avec les limites.

Question 4) Montrez que la courbe de f possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$.

Question 5) Menez l'étude de la branche infinie de la courbe de f en $-\infty$.

Question 6) Donnez l'allure de la courbe de f.

Problème 2 - Étude d'une fonction

On définit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} - x\right)$ et on pose $\alpha = \ln \dfrac{3}{4}$.

Question 1)

a) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x^2$.

b) Déduisez-en que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}} > x$.

Question 2) Quel est le signe de α ? Montrez alors que l'ensemble de définition de f est l'intervalle $[\alpha, +\infty[$, qu'on notera I dans toute la suite.

Question 3) Justifiez soigneusement que f est dérivable sur $I - \{\alpha\}$, puis calculez $f'(x)$ quand $x \in I - \{\alpha\}$.

Question 4) Montrez que f' s'annule exactement deux fois sur I en 0 et en $\ln 3$.

Question 5)

a) Montrez que $x = o\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}\right)$ quand x tend vers $+\infty$, déduisez-en un équivalent simple de $f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Dressez le tableau de variations de f.

Question 6) Pour $x > \alpha$, on pose $X = \sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}} - x$.

a) Vérifiez que $\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \dfrac{\ln X - \ln(-\alpha)}{X + \alpha} \times \left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}}{x - \alpha} - 1\right)$.

b) f est-elle dérivable en α ?

Question 7)

a) Vérifiez que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\left(\sqrt{1 - \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}} - x\mathrm{e}^{-x/2}\right)$.

b) Déduisez-en la nature de la branche infinie de la courbe de f.

Question 8) Concluez votre étude par l'allure de la courbe de f.

Devoir surveillé 3 - Corrigé

Exercice

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 6r + 5 = 0$, qui a deux racines réelles 1 et 5, donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{5x}$ où λ et μ sont deux constantes quelconques.

On cherche une solution particulière de la forme $f_p : x \mapsto axe^x$ où a est une constante à déterminer.

f_p est solution si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(axe^x + 2ae^x) - 6(ae^x + axe^x) + 5(axe^x) = 8e^x$, ce qui revient à $-4ae^x = 8e^x$, ou encore $-4a = 8$, c'est-à-dire $a = -2$.

Les solutions de l'équation avec second membre sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{5x} - 2xe^x$ où λ et μ sont deux constantes quelconques.

Pour avoir $y(0) = 2$ et $y'(0) = -4$, on doit avoir $\lambda + \mu = 2$ et $\lambda + 5\mu - 2 = -4$, ce qui donne $\lambda = 3$ et $\mu = -1$.

La seule solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = -4$ est la fonction $x \mapsto 3e^x - e^{5x} - 2xe^x$.

Exercice

D'abord, on se préoccupe de l'ensemble de définition. L'équation (notée E) a un sens si et seulement si on a $-1 \leqslant 2x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant x \leqslant 1$, ce qui revient à $\mathscr{D}_E = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Ensuite, par équivalences successives,

$$E \iff \arccos(2x) = \frac{\pi}{3} + \arcsin x \iff \begin{cases} 2x = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin x\right) \\ \frac{\pi}{3} + \arcsin x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \arcsin x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\arcsin x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x$ donc

$$E \iff \begin{cases} 4x = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{3}x \\ \frac{\pi}{3} + \arcsin x \in [0, \pi] \end{cases} \iff \begin{cases} (4+\sqrt{3})x = \sqrt{1-x^2} \\ \frac{\pi}{3} + \arcsin x \in [0, \pi] \end{cases} \iff \begin{cases} (4+\sqrt{3})^2x^2 = 1 - x^2 \\ x \geqslant 0 \\ \frac{\pi}{3} + \arcsin x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$E \iff \begin{cases} (20+8\sqrt{3})x^2 = 1 \\ x \geqslant 0 \\ \frac{\pi}{3} + \arcsin x \in [0, \pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{20+8\sqrt{3}} \\ x \geqslant 0 \\ \frac{\pi}{3} + \arcsin x \in [0, \pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \\ \frac{\pi}{3} + \arcsin \dfrac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \in [0, \pi] \end{cases}$$

L'équation E aura donc une unique solution si la deuxième condition est satisfaite et si on a bien $a = \dfrac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}} \in \mathscr{D}_E$.

Il est clair que $\sqrt{5+2\sqrt{3}} \geqslant 1$ donc $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, donc $a \in \mathscr{D}_E$.

De plus, comme $a \in [0,1]$, on a $\arcsin a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{\pi}{3} + \arcsin a \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, en particulier $\frac{\pi}{3} + \arcsin a \in [0, \pi]$.

Conclusion : l'équation E a une unique solution qui est $a = \dfrac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$.

Problème 1

Question 1) φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. Elle est même infiniment dérivable.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 2x + 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $\varphi''(x) = 2 + \mathrm{e}^{-x} > 0$.

La fonction φ' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on peut remarquer que $\varphi'(0) = 0$, donc φ' s'annule exactement une fois en 0, est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$.

La fonction φ est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Donc sa valeur minimale est sa valeur en 0, qui est 1.

Question 2)

a) D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + \mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, la fonction $x \mapsto x^2 + x + \mathrm{e}^{-x} - 1$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ (somme de fonctions dérivables) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $\sqrt{}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le th. de composition des fonctions dérivables, f est dérivable sur $]-\infty, 0[$. De même sur $]0, +\infty[$. On est donc sûr que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

b) On sait que $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand x tend vers 0, donc $\varphi(x) = x^2 + x + 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, autrement dit $\varphi(x) = 1 + \dfrac{3}{2}x^2 + o(x^2)$.
Or $f(x) = \sqrt{\varphi(x) - 1}$ et $\varphi(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{3}{2}x^2$, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{2}}|x|$.
Pour $x \neq 0$, on a donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{|x|}{x}$, donc quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ tend vers $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.
f est donc dérivable à droite et à gauche en 0, mais les dérivées à droite et à gauche en 0 sont différentes, donc f n'est pas dérivable en 0.

Question 3)

a) Quand x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0 donc $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x$ (x tendant vers $+\infty$, il est positif).
Quand x tend vers $-\infty$, $x^2 \ll \mathrm{e}^{-x}$ et $x \ll \mathrm{e}^{-x}$ donc $\varphi(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x}$ donc $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x/2}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{2f(x)}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\varphi'(x)$. On déduit le tableau de variations suivant de l'étude menée dans la question 1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

les limites se déduisant des équivalents précédents.

Question 4) On a dit juste avant que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Pour $x > 0$, on peut écrire $f(x) - x = x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2}} - 1\right)$.

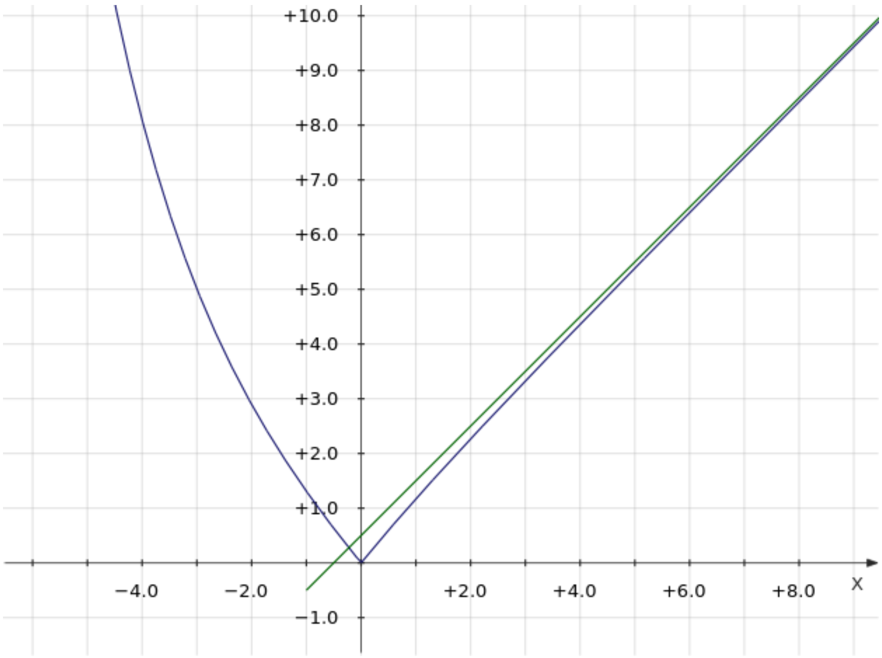
On pose $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2}$: u tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et on sait que $\sqrt{1+u} - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}u$, donc par le th. de substitution dans les équivalents, on en déduit que $\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$, car $\dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{x^2} \ll \dfrac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Donc $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} x\dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2}$. Donc $f(x) - x$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.

La courbe de f possède donc une asymptote d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ en $+\infty$.

Question 5) Quand x tend vers $-\infty$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-x/2}$ donc $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x/2}}{2(x/2)}$ tend vers $-\infty$: la courbe de f possède une branche parabolique de direction asymptotique l'axe (Oy).

Question 6)



Problème 2

Question 1)

a) Soit $F : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1 - x^2$. La fonction F est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$, on a $F'(x) = \mathrm{e}^x - 2x$.
F' est elle-même encore dérivable, on obtient ; pour tout $x \geqslant 0$, $F''(x) = \mathrm{e}^x - 2$.
On peut maintenant conclure. D'abord F'' est négative sur $[0, \ln 2]$ et positive sur $[\ln 2, +\infty[$, donc F' est décroissante sur $[0, \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2, +\infty[$. Donc F' a pour valeur minimale $F'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$, donc F' est positive sur $[0, +\infty[$, donc F est croissante sur $[0, +\infty[$. Or $F(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) \geqslant 0$, c'est ce qu'on voulait montrer.

b) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4} > \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$ donc $\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} > \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$,
or $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x^2$ d'après ce qui précède donc $\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} \geqslant x$, donc $\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} > x$.

Question 2) $f(x)$ existe si et seulement si $\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4} \geqslant 0$ et $\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} - x > 0$.

La première condition est satisfaite uniquement sur I. Quant à la deuxième, d'une part si $x \in [\alpha, 0[$ (remarquons que $\alpha < 0$), alors $-x > 0$ donc $\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} - x$ est la somme de deux réels positifs dont l'un est strictement positif donc est strictement positif donc $f(x)$ existe quand $x \in [\alpha, 0[$. D'autre part, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} > x$ d'après la question précédente, donc $f(x)$ existe aussi quand $x \geqslant 0$.

On a donc montré que l'ensemble de définition de F est $[\alpha, +\infty[$.

Question 3) La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, donc on retire les points pour lesquels son argument est nul, ici c'est α.

Sur $]\alpha, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}$ est dérivable et à valeurs dans $]0, +\infty[$. Et la fonction racine est dérivable sur $]0, +\infty[$, donc d'après le th. de composition des fonctions dérivables, $x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}}$ est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$.

Puis $x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} - x$ est dérivable sur $]\alpha, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, et la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, on a donc de même f dérivable sur $]\alpha, +\infty[$.

En utilisant les règles de calcul sur les dérivées, on obtient :

pour tout $x > \alpha$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}} - x} \times \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}} - 1 \right)$.

Question 4) Pour $x > \alpha$, $f'(x) = 0 \iff \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}} = 1 \iff \mathrm{e}^x = 2\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}}$.

Les deux membres étant positifs, on en déduit l'équivalence $f'(x) = 0 \iff (\mathrm{e}^x)^2 = 4\left(\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}\right) \iff (\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x + 3 = 0$.

L'équation du second degré $X^2 - 4X + 3 = 0$ a deux racines qui sont 1 et 3, donc

$f'(x) = 0 \iff (\mathrm{e}^x = 1 \,\text{ou}\, \mathrm{e}^x = 3) \iff (x = 0 \,\text{ou}\, x = \ln 3)$.

Question 5)

a) $\mathrm{e}^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4} \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$ donc $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$

Or il est bien connu que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ (th. de comparaison asymptotique)

donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}} = 0$ donc $x = o\left(\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}}\right)$.

On en déduit : $\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} - x \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x/2}$. Comme ce terme tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, leurs logarithmes sont encore équivalents, donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(\mathrm{e}^{x/2}) = \dfrac{x}{2}$, donc on en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) On obtient le tableau de variations suivant : le signe de la dérivée est le même que celui du « trinôme » $(\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x + 3$ donc est négatif entre les racines et positif à l'extérieur.

x	α		0		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$	?	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(\ln 3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Question 6)

a) On fait apparaître et on compense :

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{\ln X - \ln(-\alpha)}{x - \alpha} = \frac{\ln X - \ln(-\alpha)}{X + \alpha} \times \frac{X + \alpha}{x - \alpha} = \frac{\ln X - \ln(-\alpha)}{X + \alpha} \times \left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}} - x + \alpha}{x - \alpha} \right)$$

Donc $\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \dfrac{\ln X - \ln(-\alpha)}{X + \alpha} \times \left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}}{x - \alpha} - 1 \right)$.

b) Quand x tend vers α, X tend vers $-\alpha$ et la fonction ln est dérivable en $-\alpha$, donc le rapport $\dfrac{\ln X - \ln(-\alpha)}{X+\alpha}$ a une limite réelle non nulle quand x tend vers α (qui est $\dfrac{1}{-\alpha}$, mais peu importe).

Comme $x > \alpha$, on peut écrire $\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}}{x-\alpha} - 1 = \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}{x-\alpha}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x-\alpha}} - 1$.

La fonction exponentielle est dérivable en α donc $\dfrac{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}{x-\alpha}$ a une limite réelle non nulle quand x tend vers α (c'est e^α), donc on voit clairement que $\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}^x - \frac{3}{4}}}{x-\alpha} - 1$ a une limite infinie.

Conclusion : le taux d'accroissement de f en α a une limite infinie en α donc f n'est pas dérivable en α.

Question 7)

a) On factorise : $\sqrt{\mathrm{e}^x - \dfrac{3}{4}} - x = \sqrt{\mathrm{e}^x}\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}} - x\mathrm{e}^{-x/2}\right)$

donc $f(x) = \ln\left[\sqrt{\mathrm{e}^x}\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}} - x\mathrm{e}^{-x/2}\right)\right] = \dfrac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^x) + \ln\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}} - x\mathrm{e}^{-x/2}\right)$.

Donc finalement $f(x) = \dfrac{x}{2} + \ln\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}} - x\mathrm{e}^{-x/2}\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x/2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}} - x\mathrm{e}^{-x/2}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-x}} - x\mathrm{e}^{-x/2}\right) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = 0$: la courbe de f possède une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{x}{2}$.

Question 8)