Problème 1

On définit la fonction $f : x \mapsto \arccos \dfrac{1-x}{1+x}$.

Question 1) Montrez que l'ensemble de définition de f est $[0, +\infty[$.

Question 2) Justifiez soigneusement que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et quand $x \in]0, +\infty[$, calculez $f'(x)$ sous la forme $\dfrac{1}{g(x)}$ où $g(x)$ est une expression simple.

Question 3) Pour répondre à cette question, vous admettrez le th. suivant :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. Si f est continue sur I, f est dérivable sur $I - \{a\}$ et si f' a une limite ℓ en a, alors le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a aussi pour limite ℓ quand x tend vers a.

Montrez que f n'est pas dérivable en 0 (sous-entendu à droite, bien évidemment).

Question 4) Dressez le tableau de variations de f.

Question 5) Montrez que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $f([0, +\infty[)$.

Question 6) Sur la même figure, donnez l'allure de la courbe de f ainsi que celle de sa réciproque.

On pose maintenant $g : x \mapsto 2 \arctan \sqrt{x}$.

Question 7) Montrez que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et quand $x \in]0, +\infty[$, calculez $g'(x)$.

Question 8) Donnez une relation simple entre f et g. Déduisez-en une expression simple de la réciproque de f à l'aide de la fonction tan.

Question 9) Montrez que l'équation $g(x) + \arctan \dfrac{x}{3} = \pi$ a une unique solution que vous préciserez.

Problème 2

On pose $f : x \mapsto x^3 - 3x$.

Question 1) Dressez le tableau de variations de la fonction f. Résolvez les équations $f(x) = 2$, $f(x) = -2$ et l'inéquation $f(x) \geqslant -2$.

Question 2) Justifiez que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[-2, +\infty[$. On appelle φ la réciproque de cette bijection.

Précisez ses propriétés de continuité, de dérivabilité et donnez l'allure de sa courbe.

Dans toute la suite, on pose $g = \varphi \circ f$.

Question 3)

a) Montrez que g est définie sur $[-2, +\infty[$ et qu'elle y est continue.

b) Justifiez que g est dérivable sur $]-2, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

c) Précisez les variations de g.

Question 4) Soit $x \in [-2, +\infty[$. On pose $y = g(x)$.

a) Montrez que $f(y) = f(x)$, pus donnez trois expressions possibles de y en fonction de x.

b) Justifiez que pour $x \in [1, +\infty[$, $g(x) = x$ et pour $x \in [-2, 1]$, $g(x) = \dfrac{-x + \sqrt{3(4-x^2)}}{2}$.

Question 5) Finissez l'étude de g : est-elle dérivable en -2 ou en 1 ?

Question 6) Donnez l'allure de la courbe de g.

Problème 1

Question 1) arccos est définie sur $[-1,+1]$ donc $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq -1$ et $\dfrac{1-x}{1+x} \in [-1,+1]$.

On résout deux inéquations : $\dfrac{1-x}{1+x} \leqslant 1$ et $\dfrac{1-x}{1+x} \geqslant -1$.

$\dfrac{1-x}{1+x} \leqslant 1 \iff \leqslant 0 \leqslant 1 - \dfrac{1-x}{1+x} \iff 0 \leqslant \dfrac{2x}{1+x} \iff x \in]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[.$

$-1 \leqslant \dfrac{1-x}{1+x} \iff 0 \leqslant \dfrac{1-x}{1+x} + 1 \iff 0 \leqslant \dfrac{2x}{1+x} \iff x \in]-1,+\infty[.$

Donc les deux inégalités sont satisfaites uniquement quand x est positif.

L'ensemble de définition de f est donc effectivement $[0,+\infty[$.

Question 2) arccos est dérivable sur $]-1,+1[$, donc on cherche d'abord les points x tels que $\dfrac{1-x}{1+x} = 1$ ou $\dfrac{1-x}{1+x} = -1$.

La première équation a pour solution 0, la seconde n'en a pas, donc pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1-x}{1+x} \in]-1,+1[$.

On peut donc conclure : $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $]-1,+1[$ et arccos est dérivable sur $]-1,+1[$, donc d'après le th. de composition des fonctions dérivables, f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \arccos'\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \times \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} \times \dfrac{-2}{(1+x)^2} = \dfrac{2}{(1+x)^2\sqrt{\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}}}$

$f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2\sqrt{\frac{4x}{(1+x)^2}}} = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$

Question 3) Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$ donc d'après les th. d'opérations sur les limites, f' a pour limite $+\infty$ en 0 (à droite).

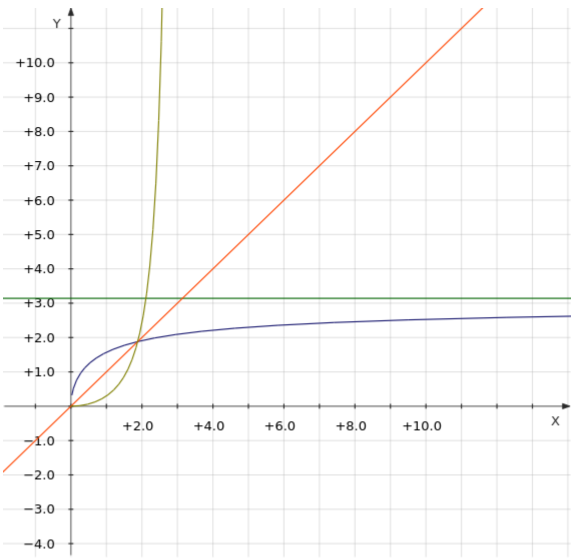
D'après le th. de limite de la dérivée, on en déduit que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, donc f n'est pas dérivable en 0.

Question 4) Il est évident que f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et que f est continue sur $[0,+\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

$f(0) = \arccos 1 = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$ donc par composition des limites, f a pour limite $\arccos(-1) = \pi$ en $+\infty$.

Question 5) f est continue sur $[0,+\infty[$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc d'après le th. de bijection, f est une bijection de $[0,+\infty[$ dans $[0,\pi[$.

Question 6) La croissance vers π de la fonction f est vraiment très lente : pour atteindre la valeur 3, il faut prendre la valeur en environ 200...



Question 7) $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (même th. qu'en question 2).

De plus, pour tout $x>0$, $g'(x) = 2\arctan'(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x}^2)\sqrt{x}} = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Question 8) f et g ont la même dérivée sur $]0,+\infty[$ et sont continues sur $[0,+\infty[$, donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x) + C$. Or $f(0) = g(0) = 0$ donc $C = 0$.

Conclusion : pour tout $x \geqslant 0$, $\arccos \dfrac{1-x}{1+x} = 2\arctan\sqrt{x}$.

Soit $y \in [0,\pi[$, on veut résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,+\infty[$:

$y = f(x) \iff \arctan\sqrt{x} = \dfrac{y}{2} \iff \sqrt{x} = \tan\dfrac{y}{2} \iff x = \tan^2\left(\dfrac{y}{2}\right)$.

La fonction réciproque de f est donc la fonction $y \mapsto \tan^2\left(\dfrac{y}{2}\right)$.

Question 9) Soit E l'équation $2\arctan\sqrt{x} + \arctan\dfrac{x}{3} = \pi$. Comme arctan est définie sur $\mathbb{R}$, il est évident que l'ensemble de définition D_E de l'équation est $[0,+\infty[$.

Pour $x \in D_E$,

$$E \iff \arctan\frac{x}{3} = \pi - 2\arctan\sqrt{x} \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = \tan\left(\pi - 2\arctan\sqrt{x}\right) \\ \pi - 2\arctan\sqrt{x} \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = -\tan\left(2\arctan\sqrt{x}\right) \\ 2\arctan\sqrt{x} \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} = -\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x} \\ \arctan\sqrt{x} \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x(x-1) = 6\sqrt{x} \\ \arctan\sqrt{x} \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x^2 - x - 6\sqrt{x} = 0 \\ x \in]1,+\infty[\end{array}\right..$$

La première équation a pour racine 0 entre autres, mais 0 n'est pas dans $]1,+\infty[$, donc

$$E \iff \left\{\begin{array}{r} x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 6 = 0 \\ x > 1 \end{array}\right.$$

On pose $X = \sqrt{x}$: avec ce changement de variables, l'équation à résoudre est donc $X^3 - X - 6 = 0$, qui a pour racine évidente 2 : $X^3 - X - 6 = (X-2)(X^2+2X+3)$. Le trinôme X^2+2X+3 est de discriminant strictement négatif donc n'a aucune racine réelle. Donc finalement il vient

$$E \iff \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x} = 2 \\ x > 1 \end{array}\right. \iff x = 4 \text{ : l'équation } E \text{ a pour unique solution } 4.$$

Problème 2

Question 1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue et dérivable (fonction polynôme).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$. Le signe de f' est évident, ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) = 2 \iff x^3 - 3x - 2 = 0 \iff (x+1)^2(x-2) = 0 \iff \big(x = -1 \text{ ou } x = 2\big)$

f étant une fonction impaire, on a directement $f(x) = -2 \iff \big(x = 1 \text{ ou } x = -2\big)$

Enfin, comme f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$, on a : pour tout $x < -2$, $f(x) < f(-2) = -2$ et pour tout $x \in [-2,-1]$, $f(x) \geqslant -2$; et sur $[-1,+\infty[$, l'étude précédente montre que f a une valeur minimale qui est -2.

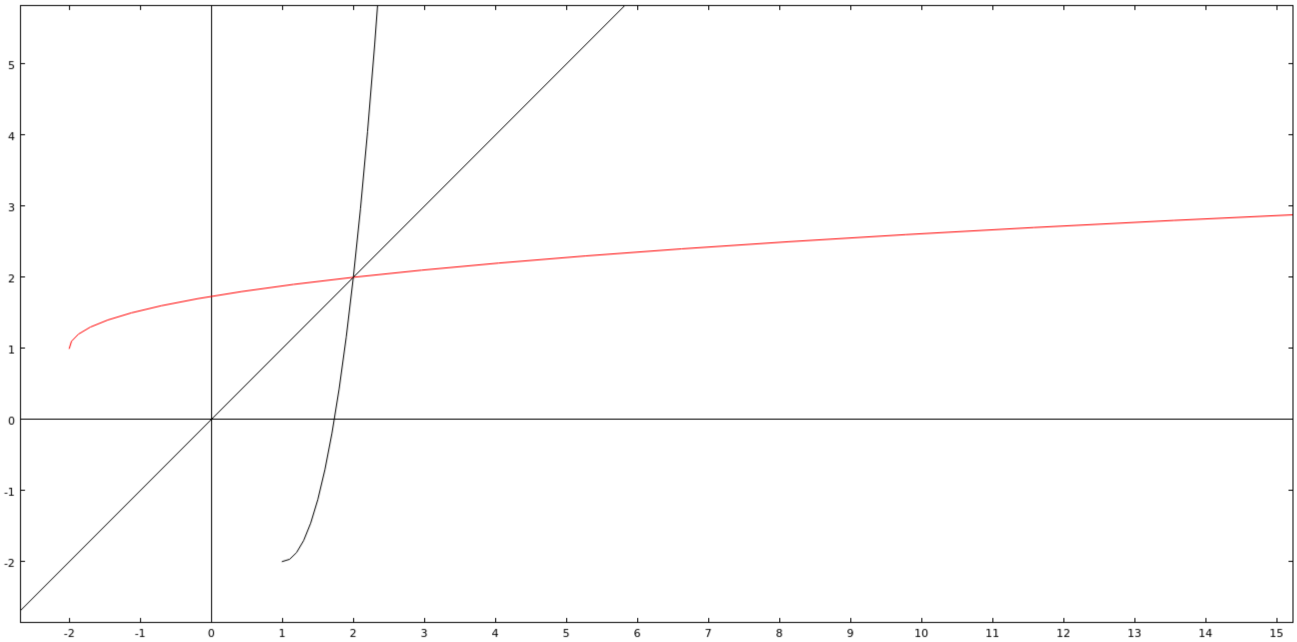
Donc $f(x) \geqslant -2 \iff x \geqslant -2$.

Question 2) Sur $[1,+\infty[$, f est continue et strictement croissante, donc d'après le th. de bijection, f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $f([1,+\infty[) = [-2,+\infty[$.

La réciproque de cette bijection est, d'après le même théorème, continue et strictement croissante sur $[-2,+\infty[$ et à valeurs dans $[1,+\infty[$.

Sur $]1,+\infty[$, f est dérivable et f' ne s'y annule pas, donc d'après le th. de dérivation d'une réciproque, φ est dérivable sur $f(]1,+\infty[) =]-2,+\infty[$.

Sur le même dessin, la courbe de f en noir et celle de φ en rouge.



Question 3)

a) φ est définie sur $[-2,+\infty[$ donc pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ existe si et s.si $f(x) \in [-2,+\infty[$, si et s.si $x \in [-2,+\infty[$ (d'après la question 1) ; donc $\mathscr{D}_g = [-2,+\infty[$.
g y est continue comme composée de fonctions continues.

b) Sur $]-2,1[$, f est dérivable et à valeurs dans $]-2,+\infty[$; et φ est dérivable sur $]-2,+\infty[$, donc d'après le th. composition des fonctions dérivables, g est dérivable sur $]-2,1[$. Et de même sur $]1,+\infty[$.

c) φ est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$, donc $g = \varphi \circ f$ a les mêmes variations que f : strictement croissante sur $[-2,-1]$, strictement décroissante sur $[-1,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

Question 4)

a) Par définition, $y = \varphi(f(x))$ est l'unique antécédent de $f(x)$ dans $[1,+\infty[$, donc $f(y) = f(x)$.
Donc $y^3 - y = x^3 - 3x$, donc $y^3 - x^3 - 3(y-x) = 0$, donc $(y-x)(y^2+xy+x^2-3) = 0$.
L'équation $y^2+xy+x^2-3 = 0$ a deux racines qui sont $\dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$ et $\dfrac{-x-\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$.
On a donc trois expressions possibles de y : x ou $\dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$ ou $\dfrac{-x-\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$.

b) φ est la réciproque de la bijection réalisée par f de $[1,+\infty[$ dans $[-2,+\infty[$, donc pour tout $x \in [1,+\infty[$, $g(x) = \varphi \circ f(x) = x$.
Pour $x \in [-2,1[$, on a $x < 1 \leqslant y$ (car φ est à valeurs dans $[1,+\infty[$), donc il n'y a plus que deux choix possibles pour y.
Or $\dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2} \geqslant 1 \iff \sqrt{3(4-x^2)} \geqslant 2+x \iff 3(4-x^2) \geqslant (2+x)^2$ (car $x+2 \geqslant 0$)
donc $\dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2} \geqslant 1 \iff 12-3x^2 \geqslant x^2+4x+4 \iff x^2+x-2 \leqslant 0$.
Comme $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, on en déduit que l'inégalité $x^2+x-2 \leqslant 0$ est vraie, donc par équivalences successives, l'inégalité $\dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2} \geqslant 1$ est vraie aussi.
Comme on doit avoir $y \geqslant 1$, on en déduit que $y = g(x) = \dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$.

Question 5) Pour $x > 1$, $g(x) = x$, donc g est dérivable à droite en 1 et $g'_d(1) = +1$.

Pour $x < 1$, $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1} = \dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}-2}{2(x-1)} = \dfrac{(-x+1)+(\sqrt{3(4-x^2)}-3)}{2(x-1)} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3(4-x^2)-9}{2(x-1)\left(\sqrt{3(4-x^2)}+3\right)}$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3(1-x^2)}{2(x-1)\left(\sqrt{3(4-x^2)}+3\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{-3(x+1)}{2\left(\sqrt{3(4-x^2)}+3\right)} \xrightarrow[x\to 1_-]{} -1.$$

g est donc dérivable à gauche en 1 et $g'_g(1) = -1$.

Comme les dérivées à gauche et à droite en 1 sont différentes, la fonction g n'est pas dérivable en 1. La courbe de g présente en 1 un point anguleux.

Pour $x > -2$, $\dfrac{g(x)-g(-2)}{x+2} = \dfrac{-x+\sqrt{3(4-x^2)}-2}{2(x+2)} = \dfrac{(-x-2)+\sqrt{3(2-x)(2+x)}}{2(x+2)} = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{3(2-x)}{2+x}} \xrightarrow[x\to -2_+]{} +\infty.$

La fonction g n'est donc pas dérivable en -2 (à droite), sa courbe possède en ce point une tangente verticale.

Question 6)