Fonctions de deux variables

L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa norme euclidienne habituelle : pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1 Préliminaires

1.1 Ouverts de $\mathbb{R}^2$

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$.
On appelle boule ouverte de centre a de rayon r l'ensemble

$$B(a, r) = \{v \in \mathbb{R}^2 \ / \ \|v - a\| < r\}$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble noté en général $\overline{B}(a, r)$:

$$\overline{B}(a, r) = \{v \in E \ / \ \|v - a\| \leqslant r\}$$

Définition. Soit V une partie de $\mathbb{R}^2$.
On dit que V est un ouvert quand tout point de V est le centre d'une boule incluse dans V :

$$\forall v \in V \quad \exists r > 0 \quad B(v, r) \subset V$$

Intuitivement, une partie est ouverte quand elle ne contient pas ses bords.

1.2 Fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert V. Soit $v \in V$.
On dit que f est continue en v quand

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in V \quad \|x - v\| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(v)| < \varepsilon$$

Dans cette définition, on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges (hors quantificateurs) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in V \quad \|x - v\| \leqslant \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(v)| \leqslant \varepsilon$$

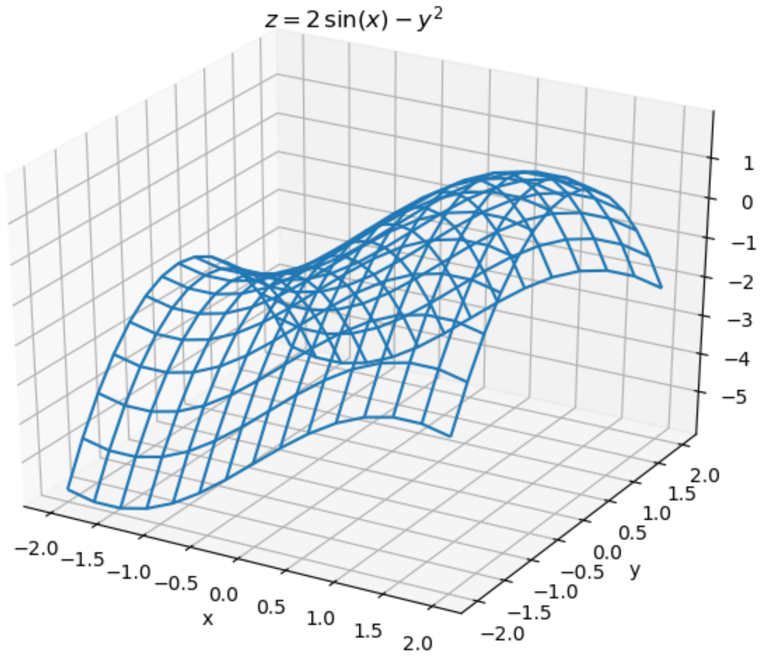
Avec les mêmes hypothèses, on peut réécrire à l'aide de boules ouvertes (ou fermées) :

Proposition 1. *f est continue en v si et s.si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in V \cap B(v, \eta) \quad f(x) \in \left]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon\right[$$

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert V.
On dit que f est continue sur V quand elle est continue en tout point de V.

Les théorèmes d'opération habituels sur les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ restent valables pour des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ continue sur un ouvert V, alors on peut représenter graphiquement la fonction f par la surface d'équation $z = f(x, y)$.



2 Dérivées partielles

2.1 Définition

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D, $X_0 = (x_0, y_0) \in D$.
On dit que f possède des dérivées partielles en X_0 quand
les taux d'accroissements selon x $\dfrac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$ et selon y $\dfrac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$ ont des limites réelles quand t tend vers 0 : dans ce cas, on pose

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Autrement dit, f possède des dérivées partielles en $X_0 = (x_0, y_0)$ quand les fonctions à une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont dérivables en x_0, y_0 respectivement.
Pour calculer une dérivée partielle en X_0 selon une variable, on considère donc l'autre variable comme une constante et on dérive par rapport à la variable choisie.

Remarque. Le fait que D soit supposé ouvert garantit la bonne définition des taux d'accroissement en X_0 et des limites des deux côtés en 0.

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D.
Si f admet des dérivées partielles en tout point de D, alors on peut définir les applications $\partial_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur tout l'ouvert D, appelées (fonctions) dérivées partielles de f sur D.

Une dérivée partielle est une dérivée comme une autre, les théorèmes d'opérations sur les dérivées s'appliquent donc aux dérivées partielles.

Exercices :

1) Montrez que la fonction $(x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculez-les.

2.2 Dérivée selon un vecteur

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D, $X_0 \in D$ et v un vecteur non nul.
Alors on dit que f admet une dérivée en X_0 selon le vecteur v
quand le taux d'accroissement $\dfrac{f(X_0+tv)-f(X_0)}{t}$ a une limite réelle quand t tend vers 0.

Il s'agit de la dérivée de la fonction induite par un déplacement sur la droite passant par X_0 et dirigée par le vecteur v : $\{X_0+tv \;/\; t \in \mathbb{R}\}$.

On note que (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$: les dérivées partielles de f en X_0 sont les dérivées en X_0 selon e_1 et e_2 respectivement.

2.3 Absence de lien entre continuité en un point et dérivées partielles

Contrairement à ce qui se passe pour les fonctions d'une seule variable, l'existence des dérivées partielles ne garantit pas la continuité au point considéré.

Exemple. La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ prolongée en $(0,0)$ par 0 admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

3 Fonctions de classe C^1

3.1 Généralités

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D.
Si f admet des dérivées partielles en tout point de D, alors on dit que f est de classe C^1 sur D quand les fonctions dérivées partielles sont continues sur D.

Les théorèmes d'opérations sur les dérivées partielles et ceux sur les fonctions continues permettent de généraliser les théorèmes classiques d'opérations sur les fonctions de classe C^1.

En particulier, toute fonction définie par opérations à partir des fonctions coordonnées est de classe C^1 sur son ensemble de définition. Et si on ajoute l'utilisation des fonctions usuelles, elle est de classe C^1 quasiment partout sauf en quelques points (se méfier des annulations de la fonction racine).

3.2 Dév. limité en un point

Théorème 1. *Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D, et $X_0 \in D$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(X_0, r) \subset D$ et une fonction ε définie sur $B(X_0, r)$ telle que*

$$\forall v = (h,k) \in B(X_0,r) \quad f(X_0+v) = f(X_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)k + \|v\|\,\varepsilon(v) \quad \text{et} \quad \lim_{v\to 0} \varepsilon(v) = 0$$

On dit alors que f possède un développement limité en X_0 à l'ordre 1.

Si on représente graphiquement f par la surface d'équation $z = f(x,y)$, la partie linéaire du d.l. précedent permet de donner une équation du plan tangent en $z_0 = f(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)(y-y_0)$$

3.3 Gradient

Définition. Avec les mêmes notations,
on appelle (vecteur) gradient de f en X_0 le vecteur de $\mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(X_0) = \nabla f(X_0) = (\partial_1 f(X_0), \partial_2 f(X_0))$$

Avec cette notation, le d.l. de f s'écrit

$$f(X_0+v) = f(X_0) + \nabla f(X_0) \cdot v + o(\|v\|)$$

3.4 Caractérisation des fonctions à dérivée partielle nulle

Proposition 2. *Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, ou plus généralement sur un ouvert de la forme $D = I \times J$ où I et J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.*

Si pour tout $X \in D$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = 0$, alors il existe une fonction à une seule variable v de classe C^1 sur J telle que pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) = v(y)$.

Si pour tout $X \in D$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$, alors il existe une fonction à une seule variable u de classe C^1 sur I telle que pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) = u(x)$.

Exprimé de façon plus grossière, si la dérivée partielle par rapport à une variable est constamment nulle, alors la fonction ne dépend pas de cette variable.

Corollaire 1. *Avec les mêmes hypothèses,*
si pour tout $X \in D$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$, alors f est constante sur D.

Remarque. Ce résultat reste valable sur des ouverts de forme plus générale (partie suivante).

***Exercices* :**

2) Déterminez les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda$ (où λ est une constante).

3) Faites de même avec la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = s(x)$ où s est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

4) Faites de même avec la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$.

Ce genre de problème s'appelle des équations aux dérivées partielles (EDP).

4 Dérivation le long d'un chemin, règle de la chaîne

Proposition 3. *Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D, et x_1, x_2 2 fonctions de classe C^1 sur un intervalle I tel que pour tout $t \in I$, $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in D$.*
Alors la fonction composée $\varphi : t \mapsto f(X(t))$ est de classe C^1 sur I et

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = \nabla f(X(t)) \cdot X'(t) = \partial_1 f(X(t)) x_1'(t) + \partial_2 f(X(t)) x_2'(t)$$

Dans ce résultat, on dit qu'on a dérivé la fonction f le long du chemin X.
Si $\nabla f(X(t)) \neq 0$, alors on constate que $\varphi'(t) > 0$ quand le vecteur $X'(t)$ est « dans le même sens » que le vecteur gradient. Ce vecteur indique donc le sens dans lequel il faut se déplacer pour faire croitre φ localement de la façon la plus rapide possible.

Une conséquence de ce théorème : caractérisation des fonctions constantes.

Proposition 4. *Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D.*
Si le gradient de f est partout nul sur D et si D est un ouvert convexe ou étoilé, alors f est constante sur D

Attention ! Ce résultat n'est vrai que si l'ouvert a une bonne forme (convexe ou étoilé en pratique, connexe par arcs en général). Il est faux si l'ouvert est « en deux morceaux », comme pouvait l'être le résultat à propos des fonctions d'une seule variable sur une partie autre qu'un intervalle.

4.1 Dérivation d'une composée

Proposition 5. *Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D, et x, y 2 fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $(u,v) \in U$, $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \in D$.*
Alors la fonction composée $g : (u,v) \mapsto f(\Phi(u,v))$ est de classe C^1 sur U et

$$\forall (u,v) \in U \quad \begin{cases} \partial_1 g(u,v) &=& \partial_1 f(\Phi(u,v)).\partial_1 x(u,v) + \partial_2 f(\Phi(u,v)).\partial_1 y(u,v) \\ \partial_2 g(u,v) &=& \partial_1 f(\Phi(u,v)).\partial_2 x(u,v) + \partial_2 f(\Phi(u,v)).\partial_2 y(u,v) \end{cases}$$

Avec les notations des physiciens, c'est plus clair, à condition de fixer les noms des variables selon leur rang :

$$\forall (u,v) \in U \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) &=& \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(u,v)).\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(u,v)).\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) &=& \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(u,v)).\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(u,v)).\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

voire même de façon encore plus abrégée

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} &=& \dfrac{\partial f}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} &=& \dfrac{\partial f}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Remarque. Attention ! Plus on utilise des notations abrégées, plus il y a de sous-entendus ! Donc pour comprendre correctement ces égalités, il faut les replacer dans le contexte, donc ne pas oublier ces sous-entendus.

En écrivant les coordonnées en ligne dans la base canonique des vecteurs gradients, on a l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(u,v)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(u,v)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Φ peut être vu comme un changement de variables : la matrice $(2,2)$ est appelée la matrice jacobienne du changement de variable. L'an prochain, avec la notion de différentielle, l'écriture en ligne sera justifiée.

Un cas particulier important : le passage en coordonnées polaires.
Par exemple, si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &=& \dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(r,\theta)).\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(r,\theta)).\sin\theta \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) &=& -\dfrac{\partial f}{\partial x}(\Phi(r,\theta)).r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\Phi(r,\theta)).r\cos\theta \end{cases}$$

Avec ces changements de variable, on peut résoudre quelques EDP simples, la difficulté étant de trouver un bon changement de variables. En pratique, il est presque toujours donné par l'énoncé.

***Exercices* :**

5) Déterminez les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

6) Déterminez les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $x = 2u - v$, $y = v - u$.

7) Déterminez les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$, $y = \dfrac{u}{v}$

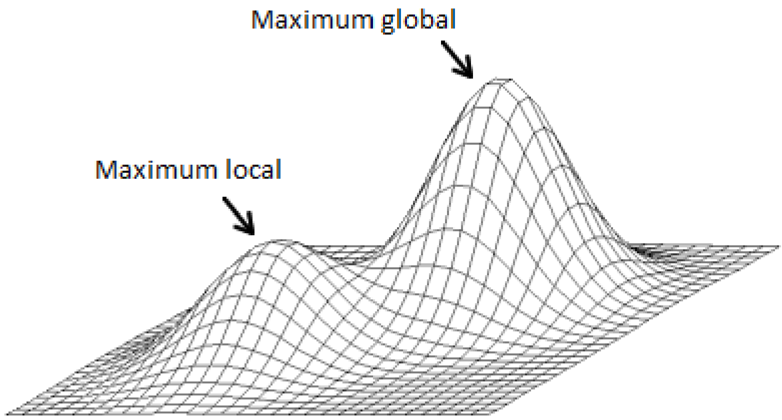
5 Extréma

5.1 Vocabulaire

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie A et $X_0 \in A$.
On dit que f possède un maximum local sur A en X_0 quand
$$\text{il existe } r > 0 \text{ tel que pour tout } X \in B(X_0, r) \cap A,\ f(X) \leqslant f(X_0).$$
On dit que f possède un minimum local sur A en X_0 quand
$$\text{il existe } r > 0 \text{ tel que pour tout } X \in B(X_0, r) \cap A,\ f(X) \geqslant f(X_0).$$
On dit que f possède un extrémum local sur A en X_0 quand f possède un maximum ou un minimum local en X_0.

Définition. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie A, et $X_0 \in A$.
On dit que f possède un maximum global sur A en X_0 quand pour tout $X \in A$, $f(X) \leqslant f(X_0)$.
On dit que f possède un minimum global sur A en X_0 quand pour tout $X \in A$, $f(X) \geqslant f(X_0)$.
On dit que f possède un extrémum global sur A en X_0 quand f possède un maximum ou un minimum global sur A en X_0.

La recherche des points en lesquels une fonction possède des extrémums (locaux ou globaux) dépend à la fois des propriétés de la fonction et de l'ensemble sur lequel la fonction est définie.



5.2 Points critiques

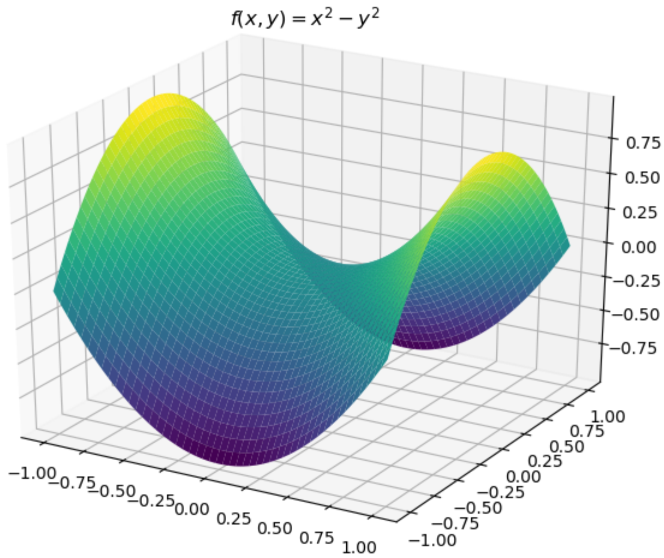
Dans cette partie, on travaille exclusivement sur des **ouverts**.

Définition. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D, et $X_0 \in D$.
On dit que X_0 est un point critique quand $\nabla f(X_0) = 0$.

Les extrémums d'une fonction de classe C^1 sont liés aux points critiques.

Proposition 6. *Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie sur un ouvert D, et $X_0 \in D$. Si f possède un extrémum local sur D en X_0, alors X_0 est un point critique.*

Remarque. Attention ! La réciproque est fausse. Un point critique en lequel la fonction n'a pas d'extrémum local est appelé un point selle (ou point col).



Pour rechercher les extrémums locaux d'une fonction de classe C^1 sur un ouvert, on commence donc par déterminer les points critiques. Une fois qu'ils sont connus, on étudie localement la fonction au voisinage de chacun :

— si au voisinage d'un point critique X_0, la fonction $v \mapsto f(X_0 + v) - f(X_0)$ est de signe constant, alors on a un extrémum local en X_0 ;

— si on peut trouver au contraire deux chemins passant par X_0 sur lesquels la fonction $X \mapsto f(X) - f(X_0)$ est de signes contraires, alors le point X_0 est un point selle.

Bien sûr, un extrémum global étant en particulier local, la recherche des extrémums globaux est un cas particulier de recherche précédente, avec la contrainte supplémentaire de prouver la globalité de l'extrémum.

***Exercices* :**

8) Déterminez les extréma de la fonction $(x, y) \mapsto x^3 + y^3$.
9) Déterminez les extréma de la fonction $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$.
10) Même question avec $(x, y) \mapsto x^3 + x^2 + y^2$.
11) Même question avec $(x, y) \mapsto x^2 + x^2y + y^3$.
12) Même question avec $(x, y) \mapsto xe^y + ye^x$.
13) Montrez que la fonction $f\colon\ (x, y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4\,(x - y)^2$ admet des minima locaux en deux points de $\mathbb{R}^2$. Justifiez que f n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$, mais qu'elle admet un minimum global. Où est-il atteint ?