ESPACES EUCLIDIENS

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

****1)** Soit E un $\mathbb{R}$- e.v. de dimension 2, $\mathscr{B}$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, on note x_1, x_2 ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on note $\langle u,v\rangle = au_1v_1 + bu_1v_2 + cu_2v_1 + du_2v_2$.

Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E si et seulement si $\begin{cases} a > 0 \\ d > 0 \\ b = c \\ b^2 - ad < 0 \end{cases}$

****2)** Soit $E = \mathbb{R}^3$. Si $X \in E$, on note $X = (x_1, x_2, x_3)$.

On définit $\langle X, Y\rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3$.

a) Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) Donnez une base orthonormée de E.

****3)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

a) Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) Dans le cas où $n = 2$, donnez une base orthonormée.

****4)** Même exercice avec $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

****5)** Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrez que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^T.B)$ est un produit scalaire sur E.

b) Montrez que si A est symétrique et B est antisymétrique, alors A et B sont orthogonales pour ce produit scalaire.

c) Déterminez $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.

****6)** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)Q(k)}{2^k}$.

a) Montrez que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

b) Donnez une base orthonormée du sous-espace $\mathbb{R}_2[X]$.

****7)** Soit E l'ensemble des suites réelles x telles que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x_n^2$ converge.

a) Vérifiez rapidement que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

b) Soit x, y deux éléments de E. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x_ny_n$ est absolument convergente.

c) Montrez que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

d) On pose $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_ny_n$. Montrez qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

****8)** Soit $n \geqslant 2$.

Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geqslant \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2$

****9)** Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées. Soit u de coordonnées $(1,3,1)$, v de coordonnées $(5,2,-1)$ et $w(1,1,1)$

a) Donnez un système d'équations et une base d'un supplémentaire de chacun des s.e.v. $\mathrm{vect}(u)$ et $\mathrm{vect}(u,v)$.

b) Déterminez la projection orthogonale de v sur la droite $\mathrm{vect}(u)$.

c) Déterminez la projection orthogonale de w sur le plan $\mathrm{vect}(u,v)$.

d) Déterminez la matrice du projecteur orthogonal sur le plan précédent.

****10)** Soit E un espace euclidien de dimension 4, on fixe une base orthonormée dans laquelle toutes les coordonnées sont exprimées. Soit $F = \{x \in E / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

a) Justifiez que F est un s.e.v. de E. Donnez une base orthonormée de F.

b) Soit v de coordonnées $(2, 3, 1, -1)$, déterminez sa projection orthogonale sur F.

c) Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.

****11)** Avec le produit scalaire de l'exercice 3, calculez la distance de X^3 à $\text{vect}(1, X, X^2)$.

****12)** Avec le produit scalaire de l'exercice 4, calculez la même distance.

****13)** On munit $M_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire de l'exercice 5. Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

****14)** Soit $E = \text{vect}(Id_{[0,\pi]}, \sin, \cos)$ muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)dt$.

Déterminez $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (x - (a\cos x + b\sin x))^2\,dx$.

****15)**

a) Déterminez $\displaystyle\inf_{x\in\mathbb{R}} \left((2x - b_1)^2 + (3x - b_2)^2 + (4x - b_3)^2\right)$ où b_1, b_2, b_3 sont fixés dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminez $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n}(k^2 - ak - b)^2$ (on admet $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$)

c) Déterminez $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

d) Déterminez $\displaystyle\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a\sin t - b\cos t - c)^2\,\mathrm{d}t$.

****16)** Soit E un espace euclidien et $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in E^n$ des vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$$

Montrez que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

****17)** Soit E un espace euclidien, F, G deux s.e.v. de E.

Montrez que $(F^\perp)^\perp = F$, $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

*****18)** On munit $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire : $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$. Déterminez $F^\perp$ puis $(F^\perp)^\perp$. Conclusion : a-t-on $E = F \oplus F^\perp$? $(F^\perp)^\perp = F$?

Indication : si $f \in F^\perp$, considérez la fonction $t \mapsto tf(t)$

****19)** Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in L(E)$ telle que $\forall x \in E$, $< x, f(x) >= 0$.

Montrez que $\forall x, y \in E$, $< x, f(y) >= - < f(x), y >$ et déduisez-en : $E = \text{Ker}(f) \overset{\perp}{\oplus} \text{Im}(f)$.

****20)** Soit E un espace euclidien, p un projecteur . On sait d'après le cours que si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Montrez que la réciproque est vraie, en utilisant le vecteur $y + \lambda x$, où $x \in \text{Im}\,p$, $y \in \text{Ker}\,p$ et λ un réel.

****21)** Soit E un espace euclidien de dimension 3, rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B}$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice (dans la base $\mathscr{B}$) est $A = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Donnez une base du noyau et de l'image de f. Vérifiez que ces deux sous-espaces de E sont supplémentaires orthogonaux.

b) Donnez une base orthonormée directe $\mathscr{B}'$ de E dont les vecteurs sont choisis dans le noyau ou l'image de f (dans cet ordre).

c) Montrez que la matrice de f dans cette nouvelle base est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

d) Donnez une interprétation géométrique de l'application f.

****22)** Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E. Si x, y sont deux vecteurs de E dont les matrices de coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont X et Y, on pose $\langle x, y\rangle = X^T A Y$.

a) Montrez que l'application $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ est une application bilinéaire symétrique de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

b) Dans cette question, $n = 3$ et $A = \operatorname{diag}(a, b, c)$. À quelle condition obtient-on un produit scalaire ?
Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, montrez que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.

c) Montrez que si $A = B^T B$ où B est une matrice inversible d'ordre n, alors $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.

d) Montrez que si $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire, alors les coefficients diagonaux de A sont tous strictement positifs.

****23)** Dans cet exercice, on garde les mêmes hypothèses et notations que dans le précédent et on étudie le cas particulier $n = 3$.

a) Soit a le coefficient d'indice $(1, 1)$, A' la matrice d'ordre 2 constituée des deux premières lignes et colonnes. Montrez que si $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire, alors $a > 0$, $\det A' > 0$ et $\det A > 0$.

b) Montrez que la réciproque est vraie : si $a > 0$, $\det A' > 0$ et $\det A > 0$, alors $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire. Pour cela, on pose $U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varphi \end{pmatrix}$.
Calculez $U^T.U$. Montrez qu'on peut trouver U telle que U inversible et $A = U^T.U$ (ne pas avoir peur de calculer, mais le faire avec stratégie, pas sans réfléchir...), ce qui conclut la question d'après l'exercice précédent.

Tout ce qui vient d'être fait en dimension 3 peut être généralisé en dimension supérieure : évidemment, il faudrait être plus abstrait, car les calculs deviennent inextricables.