Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1 Généralités

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle produit scalaire sur E toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est
- — bilinéaire (linéaire par rapport à chacune de ses deux variables vectorielles) ;
- — symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- — définie-positive : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$ et $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Remarque. Pour montrer que φ est un produit scalaire, on montre en général d'abord que φ est symétrique, puis qu'elle est linéaire à gauche, la linéarité à droite découlant alors de la symétrie.

Définition. Quand E est muni d'un produit scalaire, on dit que E est un espace préhilbertien. Quand de plus E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

En général, on note $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$ les produits scalaires.

***Exercices* :**

1) Soit E un $\mathbb{R}$- e.v. de dimension 2, $\mathscr{B}$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, on note x_1, x_2 ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.
   Montrez que l'application $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle = u_1v_1 + \dfrac{1}{2}(u_1v_2 + u_2v_1) + u_2v_2$ est un produit scalaire sur E.

1.2 Exemples fondamentaux

- — Le produit scalaire de la géométrie vérifie toutes ces propriétés.
- — Si $E = \mathbb{R}^n$, soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$: φ est appelé le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- — Plus généralement, si E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, alors à toute base $\mathscr{B}$ de E, on peut associer un produit scalaire :
  si x et y sont deux vecteurs de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$, on pose $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$.
  L'expression matricielle du produit scalaire est $\varphi(x, y) = X^T.Y$.
- — Si a, b sont deux réels tels que $a < b$, $I = [a, b]$ et $E = \mathbb{C}^0(I, \mathbb{R})$, soit f et g deux éléments de E, on pose $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_a^b fg$: φ est un produit scalaire sur E.

1.3 Norme euclidienne

Définition. Soit E un espace préhilbertien, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire sur E.

On appelle norme euclidienne associé au produit scalaire l'application de E dans $\mathbb{R}_+$ définie par $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Remarque. Cette définition a bien un sens, car d'après les propriétés d'un produit scalaire, pour tout $x \in E$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ donc $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ existe.

On vérifie alors les résultats suivants, inspirés par la géométrie habituelle dans un triangle ou un parallélogramme.

Proposition 1.

- ▷ *pour tout* $(x,y) \in E^2$, $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle$ *(égalité d'Al-Kashi)*
- ▷ *pour tout* $(x,y) \in E^2$, $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x, y\rangle$ *(égalité d'Al-Kashi)*
- ▷ *pour tout* $(x,y) \in E^2$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$ *(identité du parallélogramme)*
- ▷ *pour tout* $(x,y) \in E^2$, $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4\langle x, y\rangle$ *(identité de polarisation)*

Et encore

Proposition 2. *Avec les mêmes notations,*

- ▷ *pour tout* $(x,y) \in E^2$, $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||.||y||$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz)*
- ▷ *pour tout* $(x,y) \in E^2$, $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ *(inégalité triangulaire)*
- ▷ *pour tout* $x \in E$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$
- ▷ *pour tout* $x \in E$, $||x|| = 0 \iff x = 0$.

Remarque. Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si x et y sont colinéaires.
Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

On dit qu'un vecteur de E est unitaire (ou normalisé) si sa norme vaut 1. À tout vecteur x non nul, on associe deux vecteurs unitaires : $\dfrac{x}{||x||}$ et $-\dfrac{x}{||x||}$.

***Exercices* :**

2) soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, donnez une inégalité liant $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} b_k^2$

3) soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ une fonction à valeurs strictement positives. Montrez que :

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

1.4 Vecteurs orthogonaux

Définition. Soit E un espace préhilbertien, on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire.

On dit que deux vecteurs x, y sont orthogonaux (sous-entendu : pour ce produit scalaire) quand $\langle x, y\rangle = 0$. On peut alors noter $x \perp y$ pour signifier que x et y sont orthogonaux.

Plus généralement, si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E, on dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale quand pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $\langle x_i, x_j\rangle = 0$.

On retrouve alors le célèbre théorème de Pythagore.

Proposition 3. *Avec les mêmes notations,* $x \perp y \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

***Exercices* :**

4) Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension au moins 2 et u, v deux vecteurs non colinéaires. Montrez qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel u et v sont orthogonaux.

2 Bases orthonormées

2.1 Familles orthonormées

Définition. Soit E un espace préhilbertien. Une famille de vecteurs est dite orthonormée (ou orthonormale) quand elle est orthogonale et ces vecteurs sont unitaires.

Proposition 4. *Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.*

Une famille orthonormée génératrice de E est donc une base orthonormée de E.

Exercices :

5) Généralisez l'exercice précédent.

2.2 Existence de bases orthonormées

Théorème 1. *Soit E un espace euclidien. Il existe dans E des bases orthonormées.*

De plus, pour toute base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{vect}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

La démonstration repose sur l'algorithme d'orthogonalisation/orthonormalisation de Schmidt.

On en déduit le théorème de la base orthonormée incomplète.

Théorème 2. *Soit E un espace euclidien. Toute famille orthonormée de E peut être complétée en une base orthonormée de E.*

Exercices :

6) Dans $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1, 2, \ldots, n)$. Complétez la famille (u) en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

2.3 Calculs en base orthonormée

Soit E un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit x, y deux vecteurs de E, de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Alors $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T.Y$, $\quad ||x|| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^T.X}$ $\quad$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \langle x, e_i\rangle$.

3 Sous-espaces orthogonaux

3.1 Orthogonalité de deux s.e.v.

Définition. Soit E un espace préhilbertien. Soit F, G deux s.e.v. de E.

Soit u un vecteur de E. On dit que u est orthogonal à F (ou normal à F) quand u est orthogonal à tous les vecteurs de F.

On dit que F et G sont orthogonaux quand tout vecteur de F et tout vecteur de G sont orthogonaux, autrement dit quand pour tout $(x, y) \in F \times G$, $\langle x, y\rangle = 0$.

Proposition 5. *Si F est de dimension finie et a pour famille génératrice $(v_1, \ldots, v_k)$, alors u est orthogonal à F si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\langle u, v_i\rangle = 0$.*

Proposition 6. *Si F et G sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe : $F \cap G = \{0\}$.*

3.2 Supplémentaire orthogonal

Si F est un s.e.v. de E, espace préhilbertien, on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs normaux à F :

$$F^\perp = \{v \in E \ / \ \forall x \in F \quad \langle v, x\rangle = 0\}$$

Avec cette notation, on a clairement l'équivalence :

F et G sont deux s.e.v. orthogonaux si et seulement si $F \subset G^\perp$, ou ce qui revient au même $G \subset F^\perp$

Théorème 3. *Soit E un espace euclidien et F un s.e.v. de E.*
Alors $F^\perp$ est un s.e.v. de E.
De plus, $F^\perp$ est un supplémentaire de F, appelé **le** *supplémentaire orthogonal de F. En particulier, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.*

On peut obtenir, entre autres, une base de $F^\perp$ en utilisant le th. de la base orthonormée incomplète appliqué à une base orthonormée de F. En petite dimension, il est souvent plus rapide de résoudre un système d'équations.

***Exercices* :**

7) Soit E de dimension 4, $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $F = \mathrm{vect}(u, v)$ où $u \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$ et $v \begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\end{pmatrix}_{\mathscr{B}}$. Quelle est la dimension de $G = F^\perp$? Donnez un système d'équations de G, puis une base de G.

Remarque. Dans le cas où F est une droite vectorielle dirigée par un vecteur u, on note plutôt $G = u^\perp$ l'hyperplan orthogonal de F : on dit alors que u est un vecteur normal à G.

4 Projecteurs et symétries orthogonaux

4.1 Généralités

Définition. Soit E un espace euclidien, F un s.e.v. de E.
Le projecteur orthogonal sur F est le projecteur sur F, parallèlement à $F^\perp$. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.

Si on connaît une base orthonormée de F, $(e_1, \ldots, e_p)$, alors il est facile de calculer la projection orthogonale de x sur F :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle e_i$$

On en déduit l'inégalité de Bessel.

Proposition 7. *Soit E un espace euclidien.*
Si p est un projecteur orthogonal, alors pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

4.2 Distance à un s.e.v.

Proposition 8. *Soit E un espace euclidien, F un s.e.v. de E et x un vecteur de E.*
Soit y la projection orthogonale de x sur F. Alors pour tout $z \in F$, $||x - y|| \leqslant ||x - z||$, avec égalité si et seulement si $z = y$.

Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui minimise la distance entre x et un point de F.

$||x - y||$ est appelé la distance de x à F, c'est la plus petite des distances entre x et un élément de F, notée $d(x, F)$.

Remarque. Pour parler de supplémentaire, de projection orthogonale ou de distance, il n'est en fait pas nécessaire que E soit de dimension finie, il suffit que F le soit.