FAMILLES SOMMABLES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)**

a) Montrez que $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{(m+n)!} = 2\mathrm{e}$.

b) Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la famille $\left(\dfrac{z^{m+n}}{(m+n)!}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculez sa somme en fonction de e^z.

***2)** Justifiez l'existence de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ et donnez sa valeur.

****3)** On considère la famille des nombres $\dfrac{1}{n}$ tels que l'écriture en base 10 de n ne contienne pas le chiffre 9. Cette famille est-elle sommable ?

****4)** Montrez que la famille $\left(\dfrac{1}{mn(m+n+1)}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable et calculez sa somme.

****5)** Montrez que la famille $\left(\dfrac{1}{pq(p+q-1)}\right)_{p,q\geqslant 1}$ est sommable et donnez la valeur de sa somme.

****6)**

a) Donnez un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2+n^2}$.

b) Déduisez-en que $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{m^2+n^2} = +\infty$.

****7)** Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{2^{m+n}}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable et calculez sa somme.

****8)**

a) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^\alpha}{2^n}$ est convergente. On note $S(\alpha)$ sa somme.

b) Dans cette question, on pose $\alpha = 1$ et on note $s = S(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$. En effectuant le changement d'indice $m = n-1$, montrez que $s = 2\left(s - \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^m}\right)$ et donnez la valeur de $S(1)$.

c) En vous inspirant de ce qui précède, donnez une expression de $S(2)$ en fonction de $S(1)$ et $S(0)$, puis sa valeur.

d) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^{m+n}m}{2^{m+n}}\right)_{m,n\geqslant 0}$ est sommable et calculez sa somme.

****9)** Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{1-x^{2p+1}}$.

****10)** En utilisant un produit de Cauchy, calculez $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$.

****11)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$. On rappelle que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+m)} \underset{m\to+\infty}{\sim} \frac{\ln m}{m}$.

b) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{m(m+n^2)}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable.

c) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^m}{(m+n)(m+n-1)}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable et donnez la valeur de sa somme.