Familles sommables

Dans ce chapitre, on considère des familles de nombres (réels ou complexes) $(x_i)_{i\in I}$ indexées par un ensemble I. Dans un premier temps, on s'intéresse à des familles de réels positifs.

1 Familles de réels positifs

1.1 Convention de calcul dans $[0,+\infty]$

L'ensemble $[0,+\infty]$ est muni d'une addition : pour tout $(x,y)\in[0,+\infty]^2$,
— si x et y sont réels, $x+y$ est la somme habituelle de deux réels positifs ;
— si x ou y est l'infini, alors on pose $x+y=+\infty$.
et d'une multiplication :
— si x et y sont réels, xy est le produit habituel de deux réels positifs ;
— si x ou y est nul, alors on pose $xy=0$;
— si $x=y=+\infty$, alors on pose $xy=+\infty$.

Il est aussi muni d'une relation d'ordre :
— si x et y sont deux réels, alors $x\leqslant x$ ou $x<y$ désignent les relations habituelles ;
— si x est réel et $y=+\infty$, alors on pose $x\leqslant+\infty$ et aussi $x<+\infty$;
— si $x=y=+\infty$, alors $+\infty\leqslant+\infty$.

Proposition 1. *L'addition dans $[0,+\infty]$ est associative, commutative, et admet pour neutre 0.*
La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $[0,+\infty]$.
De plus l'addition et la mutilplication sont compatibles avec la relation d'ordre : on peut additionner ou multiplier deux inégalités membre à membre.

Définition. Soit A une partie de $[0,+\infty]$, non vide.
Si A est une partie ne contenant pas $+\infty$, alors
— si A est majorée, elle possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$;
— sinon on pose $\sup A=+\infty$.
Si A est une partie contenant $+\infty$, alors on pose $\sup A=+\infty$.

Cette définition prolonge la notion de borne supérieure à toutes les parties de $[0,+\infty]$, au sens où pour toute partie A de $[0,+\infty]$, $\sup A$ est le plus petit majorant dans $[0,+\infty]$ de la partie A.

1.2 Familles sommables de réels positifs

On note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$.
On pose $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=\sup\left\{\sum_{i\in J}x_j\ /\ J\in\mathscr{P}_f(I)\right\}$.

Remarque. Cette définition est sensée, car l'ensemble $\displaystyle\left\{\sum_{i\in J}x_j\ /\ J\in\mathscr{P}_f(I)\right\}$ est une partie de $[0,+\infty]$, donc possède toujours une borne supérieure dans $[0,+\infty]$.

D'abord deux exemples fondamentaux.

Proposition 2.

▷ *Si l'ensemble I est fini, alors la somme de la famille (x_i) au sens de la définition précédente est la somme au sens habituel.*

▷ *Si $I = \mathbb{N}$, alors la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite. Deux cas se présentent :*

— *si la série $\sum x_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$;*

— *sinon la série diverge et alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$; dans ce cas, on se permet d'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.*

Exemples.

— $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n = +\infty$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} = e$, $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x} = +\infty$.

— Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Si $\alpha \leqslant 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.

— $\displaystyle\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{2^{np}} \leqslant 2$, $\displaystyle\sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{np}} = +\infty$

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$.
On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable quand $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < +\infty$.

Évidemment, une famille sommable positive ne peut pas prendre la valeur $+\infty$, autrement dit une famille sommable est nécessairement une famille de réels positifs.

Exercices **:**

1) Soit (F_n) une suite exhaustive de parties finies de I, c'est-à-dire une suite croissante telle que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = I$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
On pose $u_n = \displaystyle\sum_{i\in F_n} x_i$.
Montrez que la famille (x_i) est sommable si et s.si la suite (u_n) converge et que dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
Exemples : soit $a, b > 1$, montrez que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{a^p b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable ; justifiez les exemples données ci-dessus.

1.3 Propriétés

Proposition 3. *La somme d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est invariante par permutation : si σ est une permutation de I, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$.*
En particulier, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable, de même somme.

En particulier, dans le cas où $I = N$, si une série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente, alors on dit qu'elle est commutativement convergente : changer l'ordre des termes change bien sûr les valeurs des sommes partielles mais ne change pas la valeur de la limites de ces sommes partielles.

Proposition 4. *Soit $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0, +\infty]$ et λ un réel positif.*
Alors $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i$.

Corollaire 1. *La somme de deux familles positives est sommable si et s.si les deux familles sont sommables. Le produit par un réel strictement positif d'une famille positive est sommable si et s.si la famille est sommable.*

Proposition 5. *Soit $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$.*
Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant x_i \leqslant y_i$ et la famille $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ l'est aussi et $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

Exercices **:**

2) Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{mn^2}$?

1.4 Théorème de sommation par paquets

Théorème 1. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.*
*Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p\in P}$ de parties (*i.e.* deux à deux disjointes et de réunion I), alors*

$$\sum_{p\in P}\left(\sum_{i\in I_p} x_i\right) = \sum_{i\in I} x_i$$

Exercices **:**

3) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable si et s.si $\alpha > 2$.

4) Soit $\alpha > 0$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{1}{\max(m,n)^\alpha}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable si et s.si $\alpha > 2$.

1.5 Théorème de Fubini

Théorème 2. *Soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs. Alors*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right)$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \ldots \times I_k$.

Exercices **:**

5) En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrez que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculez sa somme.

Généralisez : que dire à propos de la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q^\alpha)(p+q^\alpha+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$?

Un cas particulier courant.

Proposition 6. *Soit $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j in J}$ deux familles de réels positifs.*
Alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si et s.si les familles $(a_i)_{i\in I}$, $(b_j)_{j in J}$ sont sommables, dans ce cas on a

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_ib_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j$$

Exercices **:**

6) Soit $\alpha > 0$. La famille $\left(\dfrac{1}{p^\alpha q^{2-\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

2 Familles sommables de nombres réels ou complexes

2.1 Définitions

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes.

On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable quand la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire quand $\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$.

a) Cas réel

Définition. Soit x un réel.

On appelle partie positive de x le réel $x^+ = \max(0, x)$ et partie négative de x le réel $x^- = -\min(x, 0)$.

On remarque les égalités suivantes : $|x| = x^+ + x^-$ et $x = x^+ - x^-$.

Proposition 7. *Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels, alors les deux familles positives $(x_i^+)_{i\in I}$ et $(x_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et on a bien sûr $\sum_{i\in I} |x_i| = \sum_{i\in I} x_i^+ + \sum_{i\in I} x_i^-$.*

On pose alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i^+ - \sum_{i\in I} x_i^-$, qui est un réel tel que $\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$.

b) Cas complexe

Proposition 8. *Soit $(a_k)_{k\in I}$ une famille sommable de nombres complexes, alors les deux familles réelles $(\mathrm{Re}(a_k))_{k\in I}$ et $(\mathrm{Im}(a_k))_{k\in I}$ sont sommables.*

On pose alors $\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I} \mathrm{Re}(a_k) + i \sum_{k\in I} \mathrm{Im}(a_k)$, qui est un complexe tel que $\left|\sum_{k\in I} a_k\right| \leqslant \sum_{k\in I} |a_k|$.

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de complexes indexées par I.

Exemples.

— Toute famille finie est sommable et sa somme au sens des familles sommables est sa somme habituelle.

— Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et s.si elle est absolument convergente.

***Exercices* :**

7) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Montrez que la famille $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{i\ell\theta}}{(k+\ell)^3}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

2.2 Propriétés

Proposition 9. *Toute sous-famille d'une famille sommable de complexes est elle-même sommable.*

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, toute permutation de la famille est encore une famille sommable, de même somme.

En particulier, les séries absolument convergentes sont commutativement convergentes.

Les familles sommables sont celles qui sont approchables par des familles finies à ε près au sens de la proposition suivante.

Proposition 10. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes.*

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $F \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que $\left|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in F} a_i\right| \leqslant \varepsilon$.

En fait, on peut dire mieux.

Proposition 11. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes.*
Alors $(a_i)_{i\in I}$ est une famille sommable si et s.si

$$\exists \ell \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathscr{P}_f(I) \quad \forall G \in \mathscr{P}_f(I) \quad F \subset G \Rightarrow \left| \ell - \sum_{i\in F} a_i \right| \leqslant \varepsilon$$

Dans ce cas, $\ell = \sum_{i\in I} a_i$.

Comme pour les séries, on dispose d'un théorème de comparaison entre familles sommables.

Proposition 12. *Soit $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0, +\infty]$.*
Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant |a_i| \leqslant b_i$ et la famille $(b_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors la famille $(a_i)_{i\in I}$ l'est aussi et $\left|\sum_{i\in I} a_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |a_i| \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.

La linéarité est encore vérifiée, mais n'est pas évidente au regard des définitions.

Proposition 13. *L'ensemble $\ell^1(I)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i$ est une forme linéaire :*
si $(a_i), (b_i)$ sont dans $\ell^1(I)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ *et* $\sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

2.3 Théorème de sommation par paquets

Théorème 3. *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes.*
*Si I est partitionné en une famille $(I_p)_{p\in P}$ de parties (*i.e. *deux à deux disjointes et de réunion I), alors pour tout $p \in P$, la sous-famille $(a_i)_{i\in I_p}$ est sommable et*

$$\sum_{p\in P}\left(\sum_{i\in I_p} a_i\right) = \sum_{i\in I} a_i$$

Exercices :

8) Montrez que pour tout complexe z tel que $0 < |z| < 1$, la famille $(z^{|n|}_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculez sa somme.

9) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{\max(m,n)^3}\right)_{m,n\geqslant 1}$ est sommable et calculez sa somme en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.

2.4 Théorème de Fubini

Théorème 4. *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable de complexes.*
Alors pour tout $i \in I$, la famille $(a_{i,j})_{j\in J}$ est sommable ; pour tout $j \in I$, la famille $(a_{i,j})_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right)$$

Ce résultat se généralise par récurrence dans le cas d'un produit cartésien $I_1 \times \ldots \times I_k$.

Exercices :

10) Montrez que la famille $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$ est sommable et calculez sa somme.

Un cas particulier courant.

Proposition 14. *Soit* $(a_i) \in \ell^1(I)$, $(b_j) \in \ell^1(J)$.
Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ *est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j$$

2.5 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries complexes.

On appelle produit de Cauchy des deux séries la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Remarque. Quand les séries ne commencent pas à partir du rang 0, il faut se méfier ! Une idée simple est de se ramener au cas précédent en décalant les indices.
Exemple très courant : les séries commencent au rang 1. Dans ce cas, le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$.

Théorème 5. *Si les séries* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ *sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy est aussi absolument convergent et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Un exemple fondamental.

Proposition 15. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *La série de terme général* $\frac{z^n}{n!}$ *est absolument convergente et*

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$$

Remarque. L'absolue convergence des séries est indispensable ! Si on ne suppose que la convergence des séries, alors le produit de Cauchy peut très bien être une série divergente (voir exercice).

***Exercices* :**

11) Soit $x > 0$. On pose b_n la somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ et $c_n = \frac{b_n}{x^n}$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n$ converge. Dans le cas où elle converge, donnez la valeur de sa somme en fonction de x.
12) Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrez que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge, mais que son produit de Cauchy avec elle-même diverge (indication : pour tout $b > 0$ et $x \in [0, b]$, $x(b - x) \leqslant \frac{b^2}{4}$).