L'usage des calculatrices est autorisé.

Problème 1 - Deux piles consécutifs

On lance N fois une pièce déséquilibrée : $p \in]0,1[$ est la probabilité d'obtenir *pile* et on pose $q = 1-p$. Comme souvent, *pile* est représenté par 1 et *face* par 0.

On s'intéresse **exclusivement** aux couples de *pile* consécutifs qui apparaissent **sans chevauchement** (dans le sens chronologique) : quand un *pile* a été compté dans un couple, il n'est pas compté dans un autre couple. **Même si ce n'est pas rappelé dans l'énoncé, il est sous-entendu qu'on parle toujours de couples sans chevauchement.**

Une suite de N lancers est donc représentée par un N-uplet de 0 ou 1 : $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in \{0,1\}^N$.

Par exemple, si la suite des lancers ω est la suivante :

lancer n° i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\omega_i =$	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
couples pointés			+				+					+		+		

aux rangs 3, 7, 12, 14, on pointe 4 couples de *pile*, mais pas au rang 8, car le 1 qui précède au rang 7 a déjà servi dans un autre couple, pareil pour les rangs 13 et 15.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- $\mathbb{P}$ la probabilité associée à l'univers Ω ;
- P_n l'événement « le n-ème lancer a pour résultat *pile* » ;
- X_n la variable de Bernoulli qui prend la valeur 1 quand « un couple de *pile* consécutifs a été découvert à l'issue du n-ème lancer » et $a_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$

Question 1)

a) Décrivez les événements $\{X_1 = 1\}$, $\{X_2 = 1\}$, $\{X_3 = 1\}$ à l'aide des événements P_i.

b) Calculez les nombres a_i pour $i \in [\![1,3]\!]$ en fonction de p et q.

Question 2) Dans cette question, on s'intéresse uniquement aux quatre premiers lancers.

a) Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in \{X_4 = 1\}$. Donnez les trois valeurs possibles des quatre premiers lancers $(\omega_1, \dots, \omega_4)$.

b) Justifiez $\{X_4 = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (\overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4)$.

c) Calculez a_4.

Question 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifiez que $\{X_{n+2} = 1\} = \left(P_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{P_n}\right) \sqcup \left(P_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \{X_n = 1\}\right)$.

b) Déduisez-en que $a_{n+2} = p^2 a_n + qp^2$.

Question 4) On pose $a'_n = a_n - \lambda$ où λ est un réel.

a) Déterminez λ pour que la suite (a'_n) soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

b) Donnez l'expression de a'_n en fonction de n.

c) Déduisez-en que $a_n = \dfrac{p}{1+p}(p + (-p)^n)$: une démonstration qui utilise les résultats précédents sera plus appréciée qu'une démonstration par bête récurrence.

Question 5) Que peut-on dire de la variable produit $X_n.X_{n+1}$? Les variables $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant N}$ sont-elles indépendantes ?

Question 6) Un N-uplet de 0 ou 1 est représenté informatiquement par une liste de 0 ou 1. Selon le langage, la structure de liste n'est pas identique.

a) Donnez un code en langage Python qui implémente une fonction `nbcouple(liste)` de paramètre une liste de 0 ou 1 et qui renvoie le nombre de couples de *pile* consécutifs sans chevauchement dans la liste `liste`.

b) Faites de même avec le langage Ocaml.

Question 7) On note Y_N la variable aléatoire égale au nombre de couples de *pile* obtenus lors de cette expérience.

a) Calculez son espérance.

b) Montrez que $\mathbb{E}(Y_N) \sim N\dfrac{p^2}{1+p}$ quand N tend vers $+\infty$.

Question 8) On pose $M = \left\lfloor \dfrac{N}{2} \right\rfloor$.

a) Justifiez que $Y_N(\Omega) = [\![0, M]\!]$.

b) Calculez $\mathbb{P}(Y_N = M)$ (vous pourrez distinguer les cas N pair et N impair).

Problème 2

Dans ce problème, on note $\mathbb{P}$ une probabilité et $\mathbb{E}$ l'espérance associée.

Partie 1 - Espérance conditionnelle

Soit X une v.a.r. sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$. Si A est un événement non négligeable, on appelle espérance conditionnelle de X sachant A l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$ et on la note évidemment $\mathbb{E}_A(X)$.

Question 1) Donnez l'expression de $\mathbb{E}_A(X)$ en fonction des valeurs de X et de la probabilité $\mathbb{P}_A$.

Question 2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements non négligeables. Montrez la formule des espérances totales :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{E}_{A_i}(X)$$

Partie 2

Soit n, N deux entiers naturels non nuls. On considère $N+1$ urnes $\mathscr{U}_0, \ldots, \mathscr{U}_N$ telles que pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, l'urne $\mathscr{U}_i$ contienne i boules blanches et $N-i$ boules noires.

On choisit une urne au hasard et on effectue ensuite dans cette urne n tirages **avec** remise.

On note U la v.a.r. égale au numéro de l'urne choisie et B la v.a.r. égale au nombre de boules blanches obtenues après cette série de n tirages.

Question 1) Quelle est la loi de U ? Déterminez son espérance et sa variance.

Question 2) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose W_k l'événement « on tire une boule blanche au k-ème tirage ».

a) Que valent les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{U=i}(W_k)$ pour $i \in [\![0, N]\!]$?

b) Montrez que les événements W_k ont tous pour probabilité $\dfrac{1}{2}$.

Question 3)

a) Quel est l'univers-image de B ?

b) Soit $i \in [\![0, N]\!]$. Quelle est la loi de B pour la probabilité $\mathbb{P}_{\{U=i\}} = \mathbb{P}_{U=i}$?

c) Que vaut l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}_{U=i}(B)$?

Question 4) Montrez que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(B=k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{(N+1)N^n} \displaystyle\sum_{i=0}^{N} i^k (N-i)^{n-k}$.

Question 5) Montrez que $\mathbb{E}(B) = \dfrac{n}{2}$.

Partie 3

On reprend les mêmes hypothèses que dans la partie 2, mais cette fois-ci, on fait tendre N vers $+\infty$. Pour bien montrer la dépendance de B par rapport à N, on note B_N au lieu de B (remarque : n ne bouge pas).

Question 1) Montrez que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(B_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dbinom{n}{k} \displaystyle\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$.

Dans toute la suite, k est toujours un élément de $[\![0, n]\!]$ et on note $J(n,k) = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$

Question 2)

a) Que valent $J(n, 0)$ et $J(n, n)$?

b) Montrez que $J(n,k) = J(n, n-k)$.

Question 3)

a) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$: montrez que $J(n,k) = \dfrac{n-k}{k+1} J(n, k+1)$.

b) Déduisez-en une expression simple de $J(n,k)$ en fonction de n et k.

Question 4) Concluez : précisez la limite de $\mathbb{P}(B_N = k)$ quand N tend vers $+\infty$. Interprétez ce résultat.

Devoir surveillé 11 - type CCINP - E3A - Corrigé

Problème 1

Question 1)

a) $\{X_1 = 1\} = \varnothing$, car il faut au moins deux lancers pour comptabiliser un couple de *pile*.
$\{X_2 = 1\} = P_1 \cap P_2$ et $\{X_3 = 1\} = \overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3$ de manière évidente.

b) En supposant bien sûr l'indépendance des événements P_i, on obtient donc $a_1 = 0$, $a_2 = p^2$, $a_3 = qp^2$.

Question 2)

a) La suite de lancers ω appartient à l'événement $\{X_4 = 1\}$, donc un couple de *pile* est pointé à l'issue du lancer 4, donc les deux derniers lancers sont des *pile*, c'est-à-dire $(\omega_1, \ldots, \omega_4) = (\omega_1, \omega_2, 1, 1)$.
Il y a donc *a priori* 4 suites possibles : $(0,0,1,1)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$ et $(1,1,1,1)$.
La première valeur $(0,0,1,1)$ est possible : on pointe un premier couple de *pile* au rang 4.
Même chose pour la suite $(1,0,1,1)$.
La suite $(1,1,1,1)$ est possible aussi : on pointe alors un premier couple au rang 2, puis un autre au rang 4.
En revanche, la suite $(0,1,1,1)$ est impossible, car on pointe un couple au rang 3, mais alors le 1 du rang 3 ne peut plus être associé au 1 du rang 4, car il a déjà servi, donc on ne pointe pas de couple au rang 4.

b) C'est la traduction en événements de la question précédente.
$\{X_4 = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (\overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4)$, car pour pointer un couple de *pile* à l'issue du lancer 4,
— il faut bien sûr obtenir deux *pile* aux lancers 3 et 4 et
— soit on a obtenu *face* au lancer 2, auquel cas le lancer 1 n'a pas d'importance
— soit on a obtenu *pile* au lancer 2, mais dans ce cas, le couple de *pile* obtenus aux lancers 2 et 3 ne doit pas pas être comptabilisé (sinon le *pile* du lancer 3 serait compté deux fois), donc le *pile* du lancer 2 est précédé d'un *pile* au lancer 1.

c) Toujours par indépendance des lancers, on a $a_4 = p^4 + qp^2$.

Question 3)

a) Le raisonnement tenu pour justifier l'événement $\{X_4 = 1\}$ est encore valable : pour pointer un couple de *pile* à l'issue du lancer $n+2$,
— il faut bien sûr obtenir deux *pile* aux lancers $n+1$ et $n+2$ et
— soit on a obtenu *face* au lancer n
— soit on a obtenu *pile* au lancer n, mais dans ce cas, comme le couple de *pile* obtenus aux lancers n et $n+1$ ne doit pas avoir été pointé (sinon le *pile* du lancer $n+1$ serait compté deux fois), alors le *pile* du lancer n est précédé d'un *pile* au lancer $n-1$, donc l'événement $\{X_n = 1\}$ est réalisé.
Ce qui donne $\{X_{n+2} = 1\} = (P_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{P_n}) \sqcup (P_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \{X_n = 1\})$.

b) $a_{n+2} = \mathbb{P}(P_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{P_n}) + \mathbb{P}(P_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \{X_n = 1\})$ car la réunion précédente est une réunion disjointe.
On remarque que l'événement $\{X_n = 1\}$ peut être décrit uniquement à l'aide des événements $P_1, \ldots, P_n$ donc il est indépendant des événements P_{n+1} et P_{n+2}.
Donc par indépendance des événements $\{X_n = 1\}$, P_{n+1} et P_{n+2} d'une part, et P_n, P_{n+1} et P_{n+2} d'autre part, on obtient
$a_{n+2} = \mathbb{P}(P_{n+2})\mathbb{P}(P_{n+1})\mathbb{P}(\overline{P_n}) + \mathbb{P}(P_{n+2})\mathbb{P}(P_{n+1})\mathbb{P}(X_n = 1) = p^2 q + p^2 a_n$.

Question 4)

a) $a'_{n+2} = p^2 q + p^2 a_n - \lambda = p^2 q + p^2(a'_n + \lambda) - \lambda = p^2 a'_n + (p^2 q + p^2 \lambda - \lambda)$.
Si on choisit λ tel que $p^2 q + p^2 \lambda - \lambda = 0$, alors $a'_{n+2} = 0 \times a'_{n+1} + p^2 a'_n$: la suite est bien dans ce cas une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
On choisit donc $\lambda = \dfrac{p^2 q}{1-p^2} = \dfrac{p^2 q}{(1-p)(1+p)} = \dfrac{p^2 q}{q(1+p)} = \dfrac{p^2}{1+p}$.

b) L'équation caractéristique associée à la suite (a'_n) est l'équation $r^2 = p^2$ qui a deux racines distinctes p et $-p$, donc il existe α, β deux constantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a'_n = \alpha p^n + \beta(-p)^n$.
Or $a'_1 = a_1 - \lambda = -\dfrac{p^2}{1+p}$ et $a'_2 = p^2 - \dfrac{p^2}{1+p}$ donc pour trouver les valeurs de α et β, on résout le système d'équations : $\begin{cases} \alpha p - \beta p &= -\dfrac{p^2}{1+p} \\ \alpha p^2 + \beta p^2 &= p^2 - \dfrac{p^2}{1+p} \end{cases}$, ce qui donne $2\alpha p^2 = -\dfrac{p^3}{1+p} + p^2 - \dfrac{p^2}{1+p} = \dfrac{-p^3 + p^2(1+p) - p^2}{1+p} = 0$ et $\beta = \dfrac{p}{1+p}$.

c) On en déduit que $a_n = a'_n + \dfrac{p^2}{1+p} = \dfrac{p}{1+p}(-p)^n + \dfrac{p^2}{1+p} = \dfrac{p}{1+p}(p + (-p)^n)$.

Question 5) Comme X_n et X_{n+1} ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1, il en va de même pour $X_n.X_{n+1}$: c'est aussi une variable de Bernoulli. De plus, pour obtenir $X_n.X_{n+1} = 1$, il n'y a qu'une possibilité : $X_n = 1$ et $X_{n+1} = 1$, donc le paramètre de cette variable de Bernoulli est $\mathbb{P}(X_n.X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 1) = 0$, car si on obtient un couple de *pile* au rang n, alors le pile du lancer n est déjà compté donc on peut pas obtenir un couple de *pile* au rang $n+1$: les deux événements A_n et A_{n+1} sont incompatibles.

Donc $\mathbb{P}(\{X_n = 1\} \cap \{X_{n+1} = 1\}) = 0 \neq \mathbb{P}(\{X_n = 1\})\mathbb{P}(\{X_{n+1} = 1\})$: les variables X_i ne sont pas mutuellement indépendantes.

Question 6)

a) Version Python : les listes sotn en fait des tableaux au sens classique (à accès direct) :

```
def nbcouples(liste):
  etat = 0
  acc = 0
  for x in liste:
    if x == 1 and etat == 1:
      acc += 1
      etat = 0
    elif x == 1 and etat == 0:
      etat = 1
    else:
      etat = 0
  return acc
```

b) Version Ocaml : les listes sont des listes chaînées (structure récursive) :

```
let rec nbcouples liste =
  match liste with
  | [] | [_] -> 0
  | 0 :: queue -> nbcouples queue
  | 1 :: 0 :: queue -> nbcouples queue
  | 1 :: 1 :: queue -> 1 + nbcouples queue;;
```

Question 7)

a) $Y_N = X_1 + \cdots + X_N$, donc par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}(Y_N) = \sum_{i=1}^{N} a_i = N\frac{p^2}{1+p} + \frac{p}{1+p}\sum_{i=1}^{N}(-p)^i = N\frac{p^2}{1+p} + \frac{p}{1+p}(-p)\frac{1-(-p)^N}{1+p} = N\frac{p^2}{1+p} - \frac{p^2}{(1+p)^2}(1-(-p)^N).$$

b) La suite $\left(N\frac{p^2}{1+p}\right)$ diverge vers $+\infty$ alors que la suite $\left(-\frac{p^2}{(1+p)^2}(1-(-p)^N)\right)$ converge, donc on obtient bien $\mathbb{E}(Y_N) \sim N\frac{p^2}{1+p}$ quand N tend vers $+\infty$.

Question 8)

a) Le nombre maximal de couples pointés est atteint par exemple quand la suite des lancers ne contient que des 1 (dans ce cas, N est pair et le nombre de couples est $M = N/2$) ou quand la suite ne contient que des 1 et un 0 final (dans ce cas, N est impair et le nombre de couples est $(N-1)/2 = M$). Évidemment, toutes les valeurs de 0 à ce maximum sont atteintes, docn $Y_N(\Omega) = [\![0, M]\!]$.

b) Si N est pair, alors $N = 2M$ et l'événement $\{Y_N = M\}$ ne contient que la suite $(1, 1, \dots, 1)$ donc $\mathbb{P}(Y_N = M) = p^N$. Si N est impair, alors $N = 2M+1$ et l'événement $\{Y_N = M\}$ contient les suites

$$\begin{gathered}(0,1,1,1,1,1,1,\dots,1,1)\\(1,1,0,1,1,1,1,\dots,1,1)\\(1,1,1,1,0,1,1,\dots,1,1)\\\dots\\(1,1,1,1,1,1,\dots,1,1,0)\\(1,1,1,1,1,1,\dots,1,1,1)\end{gathered}$$

où le 0 peut prendre les positions de rang impair $1, 3, \dots, N$, soit $M+1$ positions.
Donc $\mathbb{P}(Y_N = M) = (M+1)p^{N-1}q + p^N$.

Problème 2

Partie 1

Question 1) Par définition, $\mathbb{E}_A(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}_A(X = x)$.

Question 2) $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements non négligeables donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(X = x)\mathbb{P}(A_i)$.

Donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in X(\Omega)} \left(x \sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(X = x)\mathbb{P}(A_i)\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{i\in I} x\,\mathbb{P}_{A_i}(X = x)\mathbb{P}(A_i)$

Les deux symboles $\sum$ sont indépendants, donc on les permute comme d'habitude

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}_{A_i}(X = x)\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i\in I} \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}_{A_i}(X = x)\mathbb{P}(A_i)\right) = \sum_{i\in I} \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}_{A_i}(X = x)\right)\mathbb{P}(A_i)$$

$$= \sum_{i\in I} \mathbb{E}_{A_i}(X)\mathbb{P}(A_i)$$

Partie 2

Question 1) Sans hypothèses particulières données par l'énoncé, on fait l'hypothèse que les choix d'urnes sont équiprobables, donc que U suit une loi uniforme sur $[\![0, N]\!]$: pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $\mathbb{P}(U = i) = \dfrac{1}{N+1}$. Donc $\mathbb{E}(U) = \sum_{i=0}^{N} i\dfrac{1}{N+1} = \dfrac{N}{2}$ et comme $V(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2$ d'après la formule de Huyghens, on a donc $V(U) = \sum_{i=0}^{N} i^2\dfrac{1}{N+1} - \dfrac{N^2}{4} = \dfrac{N(N+2)}{12}$.

Question 2)

a) La probabilité de tirer une boule blanche dans l'urne $\mathscr{U}_i$ est $p_i = \dfrac{i}{N} = \mathbb{P}_{U=i}(W_k)$ car on suppose bien sûr que les tirages dans chaque urne sont équiprobables.

b) La famille $(\{U = i\})_{i\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements non négligeables, donc d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(W_k) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{U=i}(W_k)\mathbb{P}(U = i) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{U=i}(W_k)$.

Donc $\mathbb{P}(W_k) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \dfrac{i}{N} = \dfrac{1}{N(N+1)}\sum_{i=0}^{N} i = \dfrac{1}{2}$.

Question 3)

a) Dans chaque urne, sauf la première, on peut tirer une boule blanche à chaque fois donc on peut obtenir de 0 à n boules blanches : $B(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

b) Sachant que les tirages se font dans l'urne i avec remise, le nombre de boules blanches obtenues est le nombre de réussites dans un schéma de Bernoulli (successions d'**expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre**) donc la loi de B sachant $U = i$ est une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_i)$ où $p_i = \dfrac{i}{N}$ est la probabilité de réussite de chaque tirage.

c) D'après le cours, $\mathbb{E}_{U=i}(B) = np_i = n\dfrac{i}{N}$.

Question 4) La famille $(\{U = i\})_{i\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements non négligeables, donc d'après la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(B = k) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{U=i}(B = k)\mathbb{P}(U = i) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{U=i}(B = k)$.

Comme le loi de B sachant $U = i$ est la loi $\mathscr{B}(n, p_i)$, on a d'après le cours

$$\mathbb{P}_{U=i}(B = k) = \binom{n}{k} p_i^k (1 - p_i)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{i}{N}\right)^k \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{N^n} i^k\,(N - i)^{n-k}$$

Donc $\mathbb{P}(B = k) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \binom{n}{k}\dfrac{1}{N^n} i^k\,(N - i)^{n-k} = \dfrac{1}{N+1}\binom{n}{k}\dfrac{1}{N^n}\sum_{i=0}^{N} i^k\,(N - i)^{n-k}$.

Question 5) La famille $(\{U = i\})_{i\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements non négligeables, donc d'après la formule des espérances totales, $\mathbb{E}(B) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{E}_{U=i}(B)\mathbb{P}(U = i) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \mathbb{E}_{U=i}(B) = \dfrac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} np_i = \dfrac{n}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \dfrac{i}{N} = \dfrac{n}{2}$.

Partie 3

Question 1) $\mathbb{P}(B_N = k) = \dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\binom{n}{k}\left(\frac{i}{N}\right)^k\left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-k}$.

On remarque que cette expression est une somme de Riemann sur $[0,1]$ pour la fonction $x \mapsto \displaystyle\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$, qui est continue sur $[0,1]$.

D'après le cours, on en déduit que $\mathbb{P}(B_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \displaystyle\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$.

Remarque : les puristes diront qu'une somme de Riemann est de la forme $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\ldots$ et ici on a $\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\ldots$; c'est exact, mais $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\ldots = \dfrac{N}{N+1}\times\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\ldots$ et le facteur $\dfrac{N}{N+1}$ tend vers 1, non ?

Question 2)

a) $J(n,n) = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$ et $J(n,0) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}$.

b) Changement de variables $u = 1-x$.

Question 3)

a) Intégration par parties (justifiée car on travaille avec des polynômes, donc largement de classe $\mathbb{C}^1$) :

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}(1-x)^{n-k}\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1}(n-k)(1-x)^{n-k-1}\,\mathrm{d}x$$

Le crochet vaut 0 car $k < n$, donc il vient $J(n,k) = \dfrac{n-k}{k+1}J(n,k+1)$.

b) On tâtonne un peu, on conjecture $J(n,k) = \dfrac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$, qu'on prouve ensuite par récurrence sur k.

Question 4) On constate donc que la limite de $\mathbb{P}(B_N = k)$ quand N tend vers $+\infty$ vaut toujours $\dfrac{1}{n+1}$: quand N est grand, on peut donc approcher la loi de B_N par une loi uniforme, il y a quasiment autant de chances de tirer 0 boules blanches, qu'une seule ou deux ou n'importe quel nombre entre 0 et n.