L'usage des calculatrices est autorisé.

Problème 1

On note, pour tout entier naturel n non nul, Ω_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

On munit l'ensemble Ω_n de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$. Ainsi pour tout élément σ de Ω_n, on a $\mathbb{P}(\{\sigma\}) = \dfrac{1}{n!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On dit qu'une permutation σ présente un record au rang k si, pour tout entier i vérifiant $1 \le i \le k$, on a $\sigma(i) \le \sigma(k)$. Ainsi, en particulier, toute permutation présente un record au rang 1.

On note $R_n(\sigma)$ le nombre de record que compte la permutation σ. On définit ainsi une variable aléatoire R_n sur Ω_n.

Bien sûr, la variable R_1 est certaine égale à 1.

On définit également pour $k \in [\![1,n]\!]$, l'entier $\phi_k(\sigma)$ égal au nombre d'inversions (i,k) telles que $i < k$, c'est-à-dire le nombre d'entiers i vérifiant $1 \le i < k$ et $\sigma(i) > \sigma(k)$.

Par exemple pour $n = 5$ et la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

on a des records aux rangs 1, 3 (car $\sigma(1) < \sigma(3)$ et $\sigma(2) < \sigma(3)$), 4 (car $\sigma(1) < \sigma(4)$ et $\sigma(2) < \sigma(4)$ et $\sigma(3) < \sigma(4)$), mais pas aux rangs 2 (car $\sigma(1) > \sigma(2)$) et 5 (car $\sigma(4) > \sigma(5)$ par ex.),

et la liste $(\phi_k(\sigma))_{1 \leqslant k \leqslant 5}$ est $(0,1,0,0,3)$.

On note, pour n entier naturel non nul, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $K_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et on admet que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} K_n = \frac{\pi^2}{6}$.

Question 1) Déterminez Ω_3, la loi de R_3, son espérance et sa variance.

Question 2) Calculez $\mathbb{P}(R_n = n)$.

Question 3) Soit $\sigma \in \Omega_n$.

a) Montrez que si $\sigma(1) < n$, alors σ possède au moins deux records.

b) Calculez $\mathbb{P}(R_n = 1)$.

Question 4) Soit $\sigma \in \Omega_n$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur $\phi_k(\sigma)$ pour que σ présente un record au rang k.

On pose

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Omega_n & \longrightarrow & [\![0,0]\!] \times [\![0,1]\!] \times [\![0,2]\!] \times \cdots \times [\![0,n-1]\!] \\ & \sigma & \longmapsto & (\phi_1(\sigma), \phi_2(\sigma), \ldots, \phi_n(\sigma)) \end{array}$$

Question 5) Soit $\sigma \in \Omega_n$ et $(a_1, \ldots, a_n) = \Phi(\sigma)$.

a) Justifiez que $\sigma(n) = n - a_n$.

b) Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$.
On considère la liste L croissante des entiers $1, 2, \ldots, n$ auxquels on enlève les entiers $\sigma(n), \sigma(n-1), \ldots, \sigma(n-k+1)$.
Précisez la position de $\sigma(n-k)$ dans la liste L en fonction de a_{n-k}.

Question 6) Justifiez que Φ est une bijection en donnant un algorithme qui construit explicitement la bijection réciproque.

Exemple : si on donne $n = 6$ et $\Phi(\sigma) = (0,1,0,2,4,3)$, retrouvez la permutation $\sigma \in \Omega_6$.

Donnez un code en langage Python qui implémente votre algorithme : son paramètre sera une liste A à n éléments qui représente la liste $(a_1, \ldots, a_n)$ et il renverra une liste représentant la permutation antécédent par Φ.

Question 7) On introduit, pour $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_i définie sur Ω_n, qui, à chaque élément σ de Ω_n, associe la valeur 1 si σ présente un record au rang i et 0 sinon.

a) Montrez que, pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{i}$.

b) Calculez l'espérance de la variable R_n.

c) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx \leqslant H_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx$ et déduisez-en un équivalent simple de $\mathbb{E}(R_n)$.

Question 8)

a) Soient $k \in [\![2, n]\!]$ et $i_1, i_2, \dots, i_k$ k entiers tels que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$. Calculez

$$\mathbb{P}(\{T_{i_1} = 1\} \cap \{T_{i_2} = 1\} \cap \ldots \cap \{T_{i_k} = 1\}).$$

b) Montrez que $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont mutuellement indépendantes.

c) Calculez la variance de R_n et en donner un équivalent le plus simple possible quand n tend vers $+\infty$.

Question 9) Montrez que $\mathbb{P}(R_n = 2) = \dfrac{1}{n} H_{n-1}$.

Question 10) Soit $\varepsilon > 0$.

a) Prouvez, pour tout entier n assez grand, l'inclusion entre événements suivante :

$$\left\{ \left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ \left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

b) Prouvez que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

c) Déduisez de ce qui précède que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

Problème 2 - Intégrale de Dirichlet

L'objectif du problème est de montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Dans une première partie, on donne un sens à l'intégrale de gauche. Dans la deuxième partie, on trouve la valeur de cette intégrale.

Partie 1 - Existence de l'intégrale

On pose $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$.

Question 1)

a) Montrez que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \ldots$

b) Justifiez l'existence pour tout $x > 0$ de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$.

Question 2) Pour $x \geqslant 2\pi$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_{2\pi}^x f(t) \, \mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_{2\pi}^x \frac{1 - \cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t$.

Montrez que pour tout $x \in [2\pi, +\infty[$, $F(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x} + G(x)$.

Question 3)

a) Montrez que la fonction G est monotone en précisant son sens de variation sur $[2\pi, +\infty[$.

b) Montrez que pour tout $x \geqslant 2\pi$, $G(x) \leqslant \displaystyle\int_{2\pi}^x \frac{2}{t^2} \, \mathrm{d}t$.

Question 4)

a) Déduisez-en des questions précédentes l'existence d'une limite réelle de $G(x)$ puis de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Concluez en justifiant l'existence de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$, notée plus simplement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

Partie 2 - Valeur de l'intégrale

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$, $g_n : t \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ et $h_n : t \mapsto \dfrac{\sin(2n+1)t}{t}$.

On admettra que les fonctions g_n et h_n sont prolongeables par continuité en 0 (raisonnement identique à celui de la question 1 de la partie 1) et qu'ainsi elles sont continues sur $[0, \pi/2]$, ce qui autorise à parler de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n$ et de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n$

Question 1)

a) Rappelez la formule de trigonométrie classique $\sin p - \sin q = \dots$

b) Montrez que la suite des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n$ est constante et précisez sa valeur.

Question 2) On pose $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$.

Montrez que φ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. Que vaut alors $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$?

Question 3)

a) Justifiez l'existence du réel $M = \sup\limits_{[0,\pi/2]} |\varphi'|$.

b) Montrez que $\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t \ \mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\pi M}{2(2n+1)}$.

Question 4) Montrez que la suite des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Question 5) Déterminez une relation simple entre $\displaystyle\int_0^{a_n} f$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n$, et déduisez-en que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Problème 1

Question 1) Ω_3 contient 6 permutations : l'identité, les trois transpositions $(1,2)$, $(1,3)$ et $(2,3)$ et les deux cycles de longueur 3 $(1,2,3)$ et $(1,3,2)$.

$R_3(Id) = 3$, $R_3(\ (1,2)\ ) = 2$, $R_3(\ (1,3)\ ) = 1$, $R_3(\ (2,3)\ ) = 2$, $R_3(\ (1,2,3)\ ) = 2$, $R_3(\ (1,3,2)\ ) = 1$.

Donc $R_3(\Omega_3) = [\![1,3]\!]$, $\mathbb{P}(R_3 = 1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}(R_3 = 2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(R_3 = 3) = \dfrac{1}{6}$.

$\mathbb{E}(R_3) = 1.\mathbb{P}(R_3 = 1) + 2.\mathbb{P}(R_3 = 2) + 3.\mathbb{P}(R_3 = 3) = \dfrac{11}{6}$.

D'après la formule de Huyghens et le th. de transfert, $\mathbb{V}(R_3) = \mathbb{E}(R_3^2) - \mathbb{E}(R_3)^2 = 1^2.\mathbb{P}(R_3 = 1) + 2^2.\mathbb{P}(R_3 = 2) + 3^2.\mathbb{P}(R_3 = 3) - \dfrac{121}{6} = \dfrac{17}{36}$.

Question 2) L'événement $\{R_n = n\}$ est clairement l'événement $\{Id\}$, car une permutation ayant n records est croissante et la seule qui soit croissante est l'identité. Donc $\mathbb{P}(R_n = n) = \dfrac{1}{n!}$.

Question 3)

a) Si $\sigma(1) < n$, alors en notant $k = \sigma^{-1}(n) \neq 1$, on a alors pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\sigma(i) \leqslant n = \sigma(k)$, donc σ présente un record en k en plus du record en 1,

b) On vient de montrer que si $\sigma(1) < n$, alors σ n'appartient pas à l'événement $\{R_n = 1\}$. Donc $\{R_n = 1\}$ est inclus dans l'ensemble des permutations telles que $\sigma(1) = n$.
Rcéiproquement, si $\sigma(1) = n$, alors pour tout $k \geqslant 2$, σ ne présente pas de record en k car $\sigma(1) = n > \sigma(k)$.
Conclusion : $\{R_n = 1\}$ est donc l'ensemble des permutations σ telles que $\sigma(1) = n$, qui contient $(n-1)!$ éléments, donc $\mathbb{P}(R_n = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Question 4) σ présente un record au rang k si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1[\![$, $\sigma(i) < \sigma(k)$ donc si et seulement si σ n'a aucune inversion (i,k) avec $i < k$, autrement dit si $\phi_k(\sigma) = 0$.

Question 5)

a) Soit $j = a_n = \phi_n(\sigma)$. Par définition, j est le nombre d'éléments i de $[\![1,n]\!]$ tels que $\sigma(i) > \sigma(n)$, donc $\sigma(n)$ est un élément de $[\![1,n]\!]$ qui a j éléments de $[\![1,n]\!]$ plus grands que lui : c'est donc le nombre $n - j$.

b) a_{n-k} est le nombre d'éléments parmi $\sigma(1), \ldots, \sigma(n-k)$ qui sont strictement plus grands que $\sigma(n-k)$: on peut donc retrouver $\sigma(n-k)$ dans cette liste en comptant a_{n-k} éléments à partir de la fin et en prenant celui qui précède, autrement dit, $\sigma(n-k)$ est le $(a_{n-k}+1)$-ème élément de L en partant de la fin, ou le $(n-k-a_{n-k})$-ème en partant du début.

Question 6) Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un élément de $[\![0,0]\!] \times [\![0,1]\!] \times [\![0,2]\!] \times \cdots \times [\![0,n-1]\!]$.

On veut construire σ telle que $\Phi(\sigma) = (a_1, \ldots, a_n)$. Au départ, on a la liste L des entiers $1 < 2 < \ldots < n$ à affecter à $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$.

D'après la question précédente, $\sigma(n) = n - a_n$.

La connaissance de a_n permet de déterminer $\sigma(n)$. On le raye de la liste L, il reste une liste notée encore L de $n-1$ entiers rangés dans l'ordre croissant à affecter.

Soit maintenant $j = a_{n-1} = \phi_{n-1}(\sigma)$. Par définition, j est le nombre d'éléments i de $[\![1,n]\!] - \{\sigma(n)\}$ tels que $\sigma(i) > \sigma(n-1)$, donc $\sigma(n-1)$ est un élément de L qui a j éléments plus grands que lui : on peut donc le retrouver dans la liste L.

Puis on le raye, et on réitère.

Si on suppose donc avoir trouvé les valeurs $\sigma(n), \sigma(n-1), \ldots, \sigma(n-k+1)$ et les avoir supprimées de la liste L, on se retrouve dans les conditions de la question précédente et on est capable de trouver la valeur de $\sigma(n-k)$.

Par récurrence, on connaît donc toutes les valeurs de la permutation σ, donc on a montré que l'application Φ est surjective et même bijective, puisque cet algorithme permet de retrouver la permutation σ.

En code Python (en tenant compte des indexations à partir de 0 dans les listes Python, on représente les permutations par des listes d'entiers de 0 à $n-1$).

```python
def sigma(A):
        n = len(A)
        L = list(range(n))
        S = []
        for k in range(n):
                r = n - k - 1 - A[n-k-1]
                v = L[r]
                L.remove(v)
                S.append(v)
        return list(reversed(S))
```

Question 7)

a) T_i ne peut prendre que deux valeurs 0 et 1 donc T_i est une variable de Bernoulli. Son paramètre est $\mathbb{P}(T_i = 1)$, probabilité d'avoir un record au rang i.
Pour avoir un record au rang i, il faut et il suffit que $\phi_i(\sigma) = 0$.
Or d'après la bijection précédente, cet événement a autant d'éléments que l'ensemble $[\![0,0]\!] \times [\![0,1]\!] \times [\![0,2]\!] \times \cdots \times \{0\} \times \cdots \times [\![0,n-1]\!]$ (le singleton étant en position $i-1$ dans ce produit cartésien). Donc son cardinal est $1 \times 2 \times \cdots \times (i-1) \times 1 \times (i+1) \times \cdots \times n = \dfrac{n!}{i}$.
Donc $\mathbb{P}(T_i = 1) = \dfrac{\frac{n!}{i}}{n!} = \dfrac{1}{i}$.

Autre solution : pour déterminer une permutation σ ayant un record au rang i,
— on choisit d'abord les i premiers éléments qui vont occuper les places $\sigma(1), \dots, \sigma(i)$ en vrac : $\dbinom{n}{i}$ choix
— puis on place le plus grand d'entre eux en position i : 1 choix
— puis on place les $i-1$ autres dans les cases 1 à $i-1$: $(i-1)!$ choix
— puis les autres éléments de $[\![1,n]\!]$ à placer (il y en a $n-i$) étant connus, on les place dans les $n-i$ dernières cases : $(n-i)!$ choix

par principe multiplicatif, on a donc $\dbinom{n}{i} \times 1 \times (i-1)! \times (n-i)!$ choix pour σ, c'est-à-dire $\dfrac{n!}{i}$ choix

donc la probabilité étant uniforme, la probabilité de l'événement « avoir un record au rang i » est égale à $\dfrac{\frac{n!}{i}}{n!} = \dfrac{1}{i}$.

b) $R_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i$ de manière évidente donc par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(R_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n$.

c) On doit calculer un équivalent de H_n : comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est positive, décroissante, alors d'après le th. de comparaison série-intégrale, en reprenant sa preuve, on montre que $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x}dx \leqslant H_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx$ ce qui donne $H_n \sim \ln n$.

Question 8)

a) Le même raisonnement s'applique ici :
grâce à la bijection démontrée auparavant, l'événement $\{T_{i_1} = 1\} \cap \{T_{i_2} = 1\} \cap \ldots \cap \{T_{i_k} = 1\}$ est en bijection avec le sous-ensemble de $[\![0,0]\!] \times [\![0,1]\!] \times [\![0,2]\!] \times \cdots \times [\![0,n-1]\!]$ où chaque ensemble $[\![0,i_\ell - 1]\!]$ est remplacé par le singleton $\{0\}$.
Le cardinal de $\{T_{i_1} = 1\} \cap \{T_{i_2} = 1\} \cap \ldots \cap \{T_{i_k} = 1\}$ est donc égal à $\dfrac{n!}{i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_k}$,
donc $\mathbb{P}(\{T_{i_1} = 1\} \cap \{T_{i_2} = 1\} \cap \ldots \cap \{T_{i_k} = 1\}) = \dfrac{1}{i_1 \times \ldots \times i_k}$.

b) Ce qui précède prouve donc que
$\mathbb{P}(\{T_{i_1} = 1\} \cap \{T_{i_2} = 1\} \cap \ldots \cap \{T_{i_k} = 1\}) = \mathbb{P}(\{T_{i_1} = 1\}) \times \mathbb{P}(\{T_{i_2} = 1\}) \times \ldots \times \mathbb{P}(\{T_{i_k} = 1\})$.
Et ceci est vrai quelque soit le sous-ensemble d'indices $\{i_1, \dots, i_k\}$ choisi.
Par définition, les événements $\{T_1 = 1\}, \{T_2 = 1\}, \dots, \{T_n = 1\}$ sont mutuellement indépendants et comme $T_1, \dots, T_n$ ne prennent que deux valeurs, en remplaçant un certain nombre d'événements par des $\{T_i = 0\}$ qui sont les complémentaires des $\{T_i = 1\}$ (si des événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont aussi), on obtient toutes les combinaisons possibles, ce qui prouve que $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes.

c) D'après le cours, puisque $T_1, \dots, T_n$ sont indépendantes, alors $\mathbb{V}(R_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(T_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\left(1 - \frac{1}{i}\right) = H_n - K_n$.

Question 9) On a $R_n = 2$ quand on a exactement deux variables T_i qui valent 1. Comme la première vaut 1 sûrement, cela revient à dire qu'il existe un unique indice $i \in [\![2, n]\!]$ tel que $T_i = 1$.

Autrement dit, $\{R_n = 2\} = \displaystyle\bigsqcup_{i=2}^{n} \left(\{T_i = 1\} \cap \bigcap_{j \geqslant 2, j \neq i} \{T_j = 0\} \right)$.

Donc $\mathbb{P}(R_n = 2) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left(\mathbb{P}(T_i = 1) \prod_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \mathbb{P}(T_j = 0) \right)$ par indépendance des variables $T_1, \ldots, T_n$.

Donc $\mathbb{P}(R_n = 2) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i} \prod_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \left(1 - \frac{1}{j}\right) \right)$.

Or $\displaystyle\prod_{\substack{2 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{\prod_{j=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{j}\right)}{1 - \frac{1}{i}} = \frac{\prod_{j=2}^{n}\left(\frac{j-1}{j}\right)}{\frac{i-1}{i}}$ et le produit $\displaystyle\prod_{j=2}^{n} \left(\frac{j-1}{j}\right)$ est téléscopique, il vaut $\dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n}$.

Donc $\mathbb{P}(R_n = 2) = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{i-1}{i}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i-1} = \frac{H_{n-1}}{n}$.

Question 10)

a) La suite de terme général $\dfrac{H_n}{\ln n}$ tend vers 1 donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left| \dfrac{H_n}{\ln n} - 1 \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

Donc pour tout $n \geqslant N$, pour tout $\omega \in \left\{ \left| \dfrac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\}$, on a par inégalité triangulaire

$\varepsilon \leqslant \left| \dfrac{R_n(\omega)}{\ln n} - 1 \right| \leqslant \left| \dfrac{R_n(\omega)}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n} \right| + \left| \dfrac{H_n}{\ln n} - 1 \right| \leqslant \left| \dfrac{R_n(\omega)}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n} \right| + \dfrac{\varepsilon}{2}$

donc $\dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \left| \dfrac{R_n(\omega)}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n} \right|$

autrement dit $\omega \in \left\{ \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \left| \dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n} \right| \right\}$.

On a donc bien prouvé l'inclusion de l'événement $\left\{ \left| \dfrac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\}$ dans l'événement $\left\{ \left| \dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n} \right| \geq \dfrac{\varepsilon}{2} \right\}$ à partir du rang N.

b) L'espérance de $\dfrac{R_n}{\ln n}$ est égale à $\dfrac{H_n}{\ln n}$ par linéarité de l'espérance. Donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on a

$$\mathbb{P}\left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \varepsilon \right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\left(\frac{R_n}{\ln n}\right)}{\varepsilon^2}$$

Or $\mathbb{V}\left(\dfrac{R_n}{\ln n}\right) = \dfrac{1}{(\ln n)^2} \mathbb{V}(R_n) = \dfrac{1}{(\ln n)^2}(H_n - K_n) \leqslant \dfrac{H_n}{(\ln n)^2}$

Comme $H_n \sim \ln n$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{H_n}{(\ln n)^2} = 0$, donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

c) Comme l'événement $\left\{ \left| \dfrac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right\}$ est inclus dans l'événement $\left\{ \left| \dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n} \right| \geq \dfrac{\varepsilon}{2} \right\}$ à partir du rang N, la probabilité du premier est inférieure ou égale à celle du deuxième.

Donc pour $n \geqslant N$, $0 \leqslant \mathbb{P}\left(\left| \dfrac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left| \dfrac{R_n}{\ln n} - \dfrac{H_n}{\ln n} \right| \geq \dfrac{\varepsilon}{2} \right)$.

D'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - \frac{H_n}{\ln n} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0$, donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{R_n}{\ln n} - 1 \right| \geq \varepsilon \right) = 0$.

Problème 2

Partie 1

Question 1)

a) On sait que $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$ donc $f(t)$ a pour limite 1 quand t tend vers 0 : on peut prolonger par continuité en posant $f(t) = 1$.

b) Pour tout $x > 0$, la fonction f ainsi prolongée est continue sur le segment $[0, x]$ donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Question 2) f étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le th. fondamental de l'analyse, la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc sur $[2\pi, +\infty[$.

De même, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $[2\pi, +\infty[$ donc G est une primitive de g sur cet intervalle.

On pose $H : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x} + G(x)$.

Pour tout $x \geqslant 2\pi$, $F'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et $H'(x) = \dfrac{(\sin x)x - (1-\cos x)}{x^2} + \dfrac{1-\cos x}{x^2} = F'(x)$.

Les fonctions F et H ont la même dérivée sur l'intervalle $[2\pi, +\infty[$ donc elles diffèrent d'une constante. Or la valeur en 2π de chacune d'elles est nulle. Donc elles sont égales sur $[2\pi, +\infty[$.

Autre façon de procéder : intégration par parties !

Question 3)

a) D'après ce qui précède, pour tout $x \in [2\pi, +\infty[$, $G'(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2} \geqslant 0$ car $\cos x \leqslant 1$. Donc G est croissante sur $[2\pi, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in [2\pi, +\infty[$ et tout $t \in [2\pi, x]$, $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 - \cos t \leqslant 2$ donc $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$,

donc par croissance de l'intégrale, $G(x) \leqslant \displaystyle\int_{2\pi}^x \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-2}{t}\right]_{t=2\pi}^x = \frac{-2}{x} - \frac{-2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{x} \leqslant \frac{1}{\pi}$.

Question 4)

a) La fonction G est donc croissante et majorée sur $[2\pi, +\infty[$, elle possède donc une limite réelle en $+\infty$ d'après le th. de la limite monotone. On note M cette limite.
Pour tout $x \geqslant 2\pi$, $0 \leqslant \dfrac{1-\cos x}{x} \leqslant \dfrac{2}{x}$ donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$.
Donc par opérations sur les limites, F a pour limite M en $+\infty$.

b) Pour tout $x \geqslant 2\pi$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + F(x)$ donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour limite $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + M$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie 2

Question 1)

a) $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_{n+1} - \int_0^{\pi/2} g_n = \int_0^{\pi/2} (g_{n+1} - g_n) = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2n+2)t\,\mathrm{d}t$ en utilisant le résultat précédent,

donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(2n+2)t\,\mathrm{d}t = \left[2\frac{\sin(2n+2)t}{2n+2}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}\sin(n+1)\pi = 0$.

La suite des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_n$ est donc constante en $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g_0 = \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}$.

Question 2) Sur $]0, \pi/2]$, la fonction φ est de classe C^1 par opérations sur les fonctions de classe C^1.

Pour $t \in]0, \pi/2]$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin t - t}{t \sin t}$.

Or $t\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t^2$ et $t - \sin t = t - \left(t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \dfrac{t^3}{6} + o(t^3) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3}{6}$, donc $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t}{6}$.

En particulier, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$: on peut prolonger φ par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

Pour $t \in]0, \pi/2]$, $\varphi'(t) = \dfrac{-1}{t^2} + \dfrac{\cos t}{\sin^2 t} = \dfrac{t^2\cos t - \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}$.

Or $t^2\sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} t^4$ et $t^2\cos t - \sin^2 t = t^2\left(1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + o(t^4)\right) - \left(t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 = \left(t^2 - \dfrac{t^4}{2}\right) - \left(t^2 - 2\dfrac{t^4}{6}\right) + o(t^4) = \dfrac{-t^4}{6} + o(t^4)$, donc $t^2\cos t - \sin^2 t \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-t^4}{6}$, donc finalement $\varphi'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{6}$.

En particulier, $\lim_{t\to 0} \varphi'(t) = \dfrac{-1}{6}$.

Résumons ; la fonction φ est de classe C^1 sur $]0,\pi/2]$, continue sur le segment $[0,\pi/2]$ (après prolongement) et φ' a une limite réelle en 0, donc d'après le th. de prolongement C^1, φ est de classe C^1 sur $[0,\pi/2]$.

Question 3)

a) φ est de classe C^1 donc sa dérivée φ' est continue sur le segment $[0,\pi/2]$, donc $|\varphi'|$ l'est aussi donc d'après le th. des bornes atteintes, M existe.

b) On effectue une intégration par parties.

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t \ \mathrm{d}t = \left[-\varphi(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_{t=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \varphi'(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\,\mathrm{d}t.$$

$\varphi(0) = 0$ et $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = \cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t \ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \varphi'(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\,\mathrm{d}t.$

Donc par inégalité triangulaire sur les intégrales,

$$\left|\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t \ \mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\pi/2} \varphi'(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} \left|\varphi'(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\right|\,\mathrm{d}t.$$

Or $|\cos(2n{+}1)t| \leqslant 1$ et $|\varphi'(t)| \leqslant M$ donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left|\varphi'(t)\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} M\frac{1}{2n+1}\,\mathrm{d}t$

Donc finalement, il vient $\displaystyle\left|\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t \ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\pi M}{2(2n+1)}$.

Question 4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n = \int_0^{\pi/2} (h_n - g_n) + \int_0^{\pi/2} g_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t \ \mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}$ d'après la question 1.

Or d'après l'inégalité précédente, par encadrement, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t \ \mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc par opérations sur les limites, la suite des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n$ converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Question 5) Par simple changement de variable $t = (2n+1)u$, on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2} h_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme la suite (a_n) diverge vers $+\infty$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f = L$, alors par composition des limites (ou caractérisation séquentielle des limites), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{a_n} f = L$.

Donc en passant à la limite dans l'égalité précédente (on peut, car les deux membres ont une limite), on obtient $\dfrac{\pi}{2} = L$.