SÉRIES NUMÉRIQUES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** On appelle série harmonique la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose u_n la somme partielle d'indice n de cette série.

a) Montrez que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{2n}-u_n\geqslant\dfrac{1}{2}$.

b) Déduisez-en que la série harmonique diverge.

***2)** Donnez la nature des séries suivantes (α désigne une constante strictement positive) :

a) $\displaystyle\sum\frac{2^n+1}{3^n+1}$ b) $\displaystyle\sum\frac{n}{5^n}$ c) $\displaystyle\sum\frac{n^2}{(n^2+1)^2}$

d) $\displaystyle\sum\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ e) $\displaystyle\sum\frac{1}{\sqrt[3]{n^4+n^3-1}}$ f) $\displaystyle\sum\sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$

g) $\displaystyle\sum\cos\frac{1}{n\sqrt{n}}$ h) $\displaystyle\sum\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ i) $\displaystyle\sum\ln(1+\sqrt{n})$

j) $\displaystyle\sum(\ln(1+\sqrt{n})-\ln\sqrt{n})$ k) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\ln n}$ l) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

m) $\displaystyle\sum(2\ln(n^3+1)-3\ln(n^2+1))$ n) $\displaystyle\sum\frac{2^n}{n!+1}$ o) $\displaystyle\sum\frac{n!}{n^n}$

p) $\displaystyle\sum\left((n^4+1)^{1/4}-(n^3+1)^{1/3}\right)$ q) $\displaystyle\sum\frac{1}{n\ln n}$ r) $\displaystyle\sum\frac{1}{(\ln n)^2}$

s) $\displaystyle\sum\frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}$ t) $\displaystyle\sum n\alpha^n$ u) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln n}{n^\alpha}$

****3)**

a) Montrez que la série de terme général $u_n=\arctan\dfrac{1}{2n^2}$ est convergente.

b) Montrez que pour $n\geqslant 1$, $u_n=\arctan\dfrac{n}{n+1}-\arctan\dfrac{n-1}{n}$.

c) Déduisez-en la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$.

****4)** Justifiez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{2n-1}{n^3-n}$ converge et déterminez sa somme (indication : décomposition en éléments simples).

****5)** Soit u une suite positive. On pose $v_n=\dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrez que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

****6)** Soit u une suite positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Que pouvez-vous dire des séries suivantes ?

a) $\sum u_n^2$ b) $\sum\sin(u_n)$ c) $\sum\sqrt{u_n}$ d) $\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$

****7)** Soit u une suite strictement positive telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell\in\mathbb{R}$.

a) Montrez que si $\ell>1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

b) Montrez que si $\ell<1$, alors à partir d'un certain rang, $u_n\leqslant K\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n$ où K est une constante ; déduisez-en que la série $\sum u_n$ converge.

c) Dans le cas $\ell=1$, donnez deux exemples de séries dont l'une diverge et l'autre converge.

Exemples : déterminez la nature des séries $\displaystyle\sum\frac{1}{\binom{2n}{n}}$, $\displaystyle\sum\frac{n^\alpha}{x^n}$ (α, x strictement positifs).

**8) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

a) Déterminez a et b pour que la série de terme général $\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge. Dans ce cas, donnez la valeur de sa somme.

b) Faites de même avec la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

**9) Soit u une suite de réels strictement positifs. On pose $a_n = \dfrac{u_n}{(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)}$.

a) Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

b) Calculez sa somme lorsque $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

**10) Séries de Bertrand.

Pour $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^a(\ln n)^b}$.

a) On suppose $a>1$. Trouvez un réel $c>1$ tel que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^c}\right)$ et déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

b) On suppose $a<1$. En vous inspirant de la question précédente, déterminez la nature de la série $\sum u_n$.

c) Dans le cas $a=1$, utilisez le th. de comparaison série-intégrale pour déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

d) Résumez : donnez une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série $\sum u_n$.

**11) Montrez que les séries suivantes convergent :

a) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ b) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum \ln(1+x^n)$ où $x\in]-1,+1[$

d) $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{2^n}$ e) $\displaystyle\sum \frac{\sin n \sin\frac{1}{n}}{n}$ f) $\displaystyle\sum \frac{(1+i)^n}{(1+2i)^n}$

**12) Montrez que les séries suivantes convergent. Convergent-elles absolument ?

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ où α est une constante strictement positive ;

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n n^\alpha}{n!}$;

c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ (on pourra faire un dév. limité) ;

d) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

***13) Pour quelles valeurs de $\alpha>0$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)^n+n^\alpha}}$ converge-t-elle ?

**14) Soit $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrez que la suite x converge (sa limite est un réel noté γ, appelée constante d'Euler : c'est un nombre mystérieux dont on ne sait pas grand-chose, on ne sait même pas si c'est un rationnel ou non).

**15) Le premier pas vers la formule de Stirling : montrez que la suite de terme général $\dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ converge vers un réel strictement positif L (indication : passer au logarithme). On peut montrer grâce aux résultats d'un devoir non surveillé que $A=\sqrt{2\pi}$, ce qui donne la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**16) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose qu'il existe un complexe $z_0>0$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

a) Montrez que pour tout $z\in\mathbb{C}$, si $|z|<|z_0|$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Peut-on dire quelque chose à propos de la convergence de la série dans le cas où $|z|=|z_0|$.

b) On note $R=\sup\{r\in\mathbb{R}_+ \ / \ (a_n r^n) \text{ bornée}\}$ si R existe, sinon on pose $R=+\infty$. Montrez que si si $|z|<R$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente et si $|z|>R$, alors la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

c) On note $R=R(a_n)$ pour bien montrer la dépendance à la suite a.
Montrez que pour tout polynôme P non nul, $R(a_n)=R(P(n)a_n)$.

****17)** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

a) Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n} \sim \ln\left(\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\right)$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n}$.

b) Étudiez la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ quand $\alpha \in]0,1[$.

c) Soit $\alpha > 1$. Montrez que $\dfrac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant \displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} \dfrac{1}{x^\alpha}dx$. Déduisez-en la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$.

****18)** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^a}$.

a) Dans le cas où $a \leqslant 0$ ou $a > 1$, quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$?

b) On suppose désormais que $0 < a \leqslant 1$ et on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$. Montrez que la série $\sum v_n$ converge. Déduisez-en la nature de la série $\sum u_n$.

*****19)** Soit u une suite réelle et v une suite complexe. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

On suppose que la suite u est positive et décroissante de limite nulle et la suite V est bornée.

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)V_k$.

b) Déduisez-en que la série $\sum u_n v_n$ converge.
Applications :

c) Soit w une suite complexe telle que $\sum w_n$ converge. Montrez que pour tout $a > 0$, la série $\sum \dfrac{w_n}{n^a}$ converge aussi.

d) Soit $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donnez la nature des séries $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^a}$, $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n^a}$ et $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n^a}$.

e) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \geqslant \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$. Déterminez la nature des séries $\sum \dfrac{|\cos(n\theta)|}{n^a}$ et $\sum \dfrac{|\sin(n\theta)|}{n^a}$.

*****20)** Soit u une suite réelle positive et décroissante. Montrez que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont la même nature.

Retrouvez grâce à ce résultat la nature des séries de Riemann et celles des séries de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^b}$ où $b \geqslant 0$.

*****21)** Soit u une suite positive de limite nulle. On appelle U_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum u_n$ et on suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - nu_n| \leqslant M$.

a) Montrez que pour tout $n \geqslant 2$, $\left|\dfrac{U_n}{n} - \dfrac{U_{n-1}}{n-1}\right| \leqslant M\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right)$

b) Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

*****22)** Soit u une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge. Montrez que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

*****23)** Soit $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ une série convergente à termes positifs.

a) Montrez que $\dfrac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrez que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n}{n(n+1)}$ converge et montrez que sa somme est la même que celle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.