Séries numériques

1 Généralités

1.1 Définitions et notations

Définition. [**Série numérique**] Soit u une suite réelle ou complexe. On associe à cette suite la suite s définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

La suite s est appelée série de terme général u_n et notée $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ ou $\sum u$. Chaque nombre s_n est appelée somme partielle d'indice n de la série.

L'adjectif « numérique » associé au mot « série » signifie que les termes généraux de la série sont des nombres (ce qui sous-entend qu'on peut aussi parler de séries vectorielles ou de séries fonctionnelles, enfin de séries de toutes choses qu'on peut additionner, ce sera le cours de l'an prochain).

On définit de même les séries définies à partir d'un certain rang n_0 notée $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$.

On prendra garde à bien distinguer les notions :

— u est la **suite** de terme général u_n ;

— $\sum u$ est la **série** de terme général u_n : c'est la suite s des sommes partielles.

1.2 Convergence d'une série

Définition. Soit u une suite numérique.

On dit que la série $\sum u$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge.

Dans ce cas, si $\ell = \lim_{n \to +\infty} s_n$, alors ℓ est appelé somme de la série $\sum u$ et on note $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On appelle aussi reste partiel d'indice n de la série le nombre $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, de sorte que $r_n + s_n = \ell$. La suite des restes partiels converge donc vers 0.

Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u$ diverge.

Exemples.

— Soit $x \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$, et dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Cette série est appelée série géométrique de raison x

— Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, alors la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Remarque.

— Même si on peut prouver qu'une série est convergente, il est en général difficile de trouver la valeur exacte de sa somme (comme il est en général difficile de préciser la limite d'une suite convergente).

— Vous ne confondrez pas les notations :

$\sum u$ désigne la série, c'est-à-dire une suite ; $\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est un nombre.

On peut bien sûr généraliser aux séries quelques théorèmes d'opérations.

Proposition 1. *Soit u, v deux suites numériques et λ un scalaire.*
Si les séries $\sum u$ *et* $\sum v$ *convergent,*
alors la série $\sum (u + \lambda v)$ *converge et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
Ceci prouve aussi que l'ensemble des séries convergentes est un K-espace vectoriel.

Remarque.

- La somme d'une série divergente et d'une série convergente est une série divergente.
  En revanche, il n'y a rien à dire *a priori* à propos de la somme de deux séries divergentes.
- Attention à ne pas faire apparaître des séries divergentes en décomposant en deux sommes une somme de série convergente !
  Comme dans l'exemple ci-contre : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$
  ce qui n'a pas de sens, car les deux séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n+1}$ divergent !

1.3 Lien entre convergence de suites et convergence de séries

Proposition 2. *Soit u une suite numérique.*
Si la série $\sum u$ *converge, alors la suite u converge vers* 0.

Remarque.

- **La réciproque est fausse !**
- Par contraposition, si une suite u ne tend pas vers 0, alors la série associée diverge : on dit que la série $\sum u$ diverge grossièrement.

Exemples.

- Les séries constantes divergent grossièrement, sauf la série nulle.
- Soit $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$. Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge, pourtant son terme général tend vers 0.
- On appelle série harmonique la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$. Cette série diverge, pourtant son terme général tend vers 0.

Définition. Soit u une suite numérique. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.
La série $\sum v$ est appelée la série téléscopique (ou série domino, ou série différence) associée à u.

Proposition 3. *Une suite converge si et seulement si sa série téléscopique associée converge.*

Exercices :

1) Soit u une suite de réels strictement positifs. On pose $a_n = \dfrac{u_n}{(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n)}$.
   Montrez que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ est une série télescopique convergente.

2 Séries à termes positifs

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux séries dont le terme général est un réel positif.

Proposition 4. *Soit u une suite réelle positive.*
Alors la série $\sum u$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant M.$$

Ce résultat est quasiment inutilisable en pratique, mais très important en théorie comme la suite du cours le montre.

2.1 Séries de référence

Habituellement, pour prouver qu'une série à termes positifs converge, on la compare à des séries de référence. Celles-ci sont de deux types :

— les séries géométriques : soit $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\sum_{n \geqslant 0} x^n \text{ converge si et seulement si } x < 1$$
— les séries de Riemann : soit $\alpha > 0$,
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

2.2 Théorème de comparaison des séries à termes positifs

Théorème 1. *Soit u, v deux suites réelles positives.*

- ▷ *Si $0 \leqslant u \leqslant v$ et si la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ converge.*
- ▷ *Si $0 \leqslant u \leqslant v$ et si la série $\sum u$ diverge, alors la série $\sum v$ diverge.*
- ▷ *Si $u \sim v$ et $u \geqslant 0$, alors les séries $\sum u$ et $\sum v$ sont de même nature : l'une converge si et seulement si l'autre converge.*

Remarque.

— Dans ce théorème, il suffit que les inégalités soient vraies à partir d'un certain rang seulement.
— Si les séries sont à termes négatifs, on se ramène à ce théorème en travaillant avec les séries opposées. Ce qui compte donc est qu'elles soient de signe constant.
— Avec des séries dont le terme général n'est pas de signe constant, alors ce théorème est faux. Il faut donc bien s'assurer et mettre en valeur que les séries sont positives (ou négatives).

***Exercices* :**

2) Déterminez la nature (convergence ou divergence) de la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^2 - 1}$ et déterminez sa somme.

3) Soit $x \geqslant 0$, déterminez la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$.

4) Soit $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrez que la suite x converge (sa limite est un réel noté γ, appelée constante d'Euler : c'est un nombre mystérieux dont on ne sait pas grand-chose, on ne sait même pas si c'est un rationnel ou non).

2.3 Théorème de comparaison série - intégrale

Proposition 5. *Soit f une fonction positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*
Alors la série de terme général $f(n)$ et la suite de terme général $\int_0^n f$ sont de même nature.

Application : les séries de Riemann.

À retenir : la technique d'encadrement des sommes partielles d'une série $\sum f(n)$ (ou des restes partiels) par des intégrales quand f est positive et monotone.

Exercices :

5) Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ (**à connaître !**).

6) Montrez que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

   Plus généralement, si $\alpha > 1$, donnez un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to +\infty$.

7) Montrez que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$.

3 Séries absolument convergentes

Définition. Soit u une suite réelle ou complexe.
On dit que la série $\sum u$ est absolument convergente si et seulement si la série à termes positifs $\sum |u|$ est une série convergente.

Théorème 2. *Si une série est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque. La réciproque est fausse : la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (on l'appelle la série harmonique alternée) mais ne converge pas absolument.

Proposition 6. *Soit u une suite réelle ou complexe, v une suite réelle positive.*
Si $u_n = O(v_n)$ quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum v$ converge, alors la série $\sum u$ est absolument convergente, donc convergente.

Ceci est donc valable en particulier si $u_n = o(v_n)$.

Exercices :

8) Montrez que les séries de termes généraux $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $\dfrac{(-1)^n \ln n}{n^2}$, $\ln(1 + x^n)$ où $x \in]-1, +1[$ sont des séries convergentes.

9) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ selon la valeur du complexe z ?

10) Pour $s \in \mathbb{C}$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Justifiez que $\zeta(s)$ existe si et s.si $\mathrm{Re}(s) > 1$.

4 Séries alternées

Définition. Une série alternée est une série réelle $\sum u_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est de signe opposé à u_n.

En général, les séries alternées sont reconnaissables à la présence d'un facteur $(-1)^n$ dans l'expression du terme général.
On dispose d'une condition suffisante de convergence d'une série alternée (qu'on appelle le critère spécial des séries alternées).

Théorème 3. *Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée.*
Si la suite u
- *est positive,*
- *est décroissante,*
- *et converge vers 0,*

alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Dans ce cas, la somme de la série est positive, et si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ *le reste partiel d'indice* n*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* R_n *est du signe de son premier terme (*i.e. *du signe de* $(-1)^{n+1}$*) et* $|R_n| \leqslant u_n$*.*

Exemples.

— La série harmonique alternée $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

— La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge.

Remarque.

— Si $\sum_{n \geqslant n_0} (-1)^n u_n$ est une série alternée convergente, sa somme a le signe du premier terme de la série (ici le signe de $(-1)^{n_0} u_{n_0}$).

— La condition de décroissance de la suite u est essentielle ! Contre-exemple : la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ est une série alternée divergente.
De plus, cela fournit un contre-exemple au théorème de comparaison par équivalents si on ne tient pas compte de la condition sur le signe, qui doit être constant.

5 Développement décimal d'un réel

Théorème 4. *Tout réel positif* x *est la somme d'une série décimale propre :*
il existe une unique suite (d_n) *d'entiers naturels telle que*

— *pour tout* $n \geqslant 1$*,* $d_n \in [\![0, 9]\!]$ *;*

— (d_n) *n'est pas stationnaire en* 9 *:* $\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad d_n \neq 9$ *;*

— x *est la somme de la série* $\sum \frac{d_n}{10^n}$*.*

Cette série est appelée développement décimal propre de x*.*

On note alors $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} = d_0, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$

Remarque.

— Pour un réel négatif, il suffit de prendre l'opposé.

— Si on supprime la deuxième hypothèse, alors la suite (d_n) n'est plus forcément unique : les décimaux (*i.e.* de la forme $\frac{p}{10^n}$ où p et n sont deux entiers) ont alors un deuxième développement dit impropre, constitué à partir d'un certain rang d'une suite infinie de 9. Par exemple, $1 = 0,99999\ldots$

— Un réel est un rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.