Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ fixé. Une urne contient une boule rouge et $n-1$ boules blanches. On vide l'urne en y effectuant des tirages successifs de la manière suivante :

— les tirages de numéro impair sont effectués SANS remise,

— les tirages de numéro pair sont effectués AVEC remise.

Question 1) Quel nombre N de tirages faut-il effectuer pour vider l'urne ?

Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note R_k l'événement « on obtient la boule rouge à l'issue du k-ème tirage » (que ce soit la première fois ou non) et S_k l'événement « on obtient la boule rouge pour la première fois à l'issue du k-ème tirage ».

Question 2)

a) On note A_k l'événement « la boule rouge est dans l'urne juste avant le k-ème tirage ». Exprimez A_k en fonction des événements $R_1, R_3, \ldots, R_{2\ell+1}, \ldots$

b) Calculez $\mathbb{P}(A_{2i})$ et $\mathbb{P}(A_{2i+1})$ pour tout i pour lequel cela a un sens.

Question 3) Montrez que la probabilité $\mathbb{P}(R_k)$ ne dépend pas de k en donnant sa valeur.

Question 4) On note B_k l'événement « à l'issue des k premiers tirages, on n'obtient que des boules blanches ». Calculez $\mathbb{P}(B_{2i})$ pour les entiers i pour lesquels cela a du sens.

Question 5) Montrez que pour tout entier i pour lequel cela a du sens, on a $\mathbb{P}(S_{2i+1}) = \dfrac{n-i-1}{n(n-1)}$.

Question 6) Déduisez-en que la probabilité pour que la boule rouge ait été tirée exactement une fois au cours des N tirages vaut $\dfrac{1}{2}$.

Problème 2 - Une pièce et une urne

On étudie l'expérience aléatoire suivante : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que l'un des événements suivants soit réalisé :

— soit on obtient "pile" ;

— soit on a effectué n lancers.

On appelle X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de "face" obtenus.

Puis dans une urne, on met une boule blanche et X_n boules noires et on effectue le tirage d'une boule. On s'intéresse à l'événement B_n « on obtient la boule blanche ».

Question 1)

a) Déterminez la loi de la v.a.r. X_n.

b) On pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^{k+1}}$. Montrez que $2s_n = s_n + 1 - \dfrac{n+1}{2^n}$ sans faire de récurrence (indication : $k = (k-1)+1$)

c) Déduisez-en l'espérance de X_n.

Question 2) Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{n,k}$ l'événement « on obtient la boule blanche après avoir obtenu k fois "face" ».

a) Si $k \leqslant n-1$, calculez $\mathbb{P}(B_{n,k})$

b) Que vaut $\mathbb{P}(B_{n,n})$?

Question 3) Déterminez une expression explicite de $\mathbb{P}(B_n)$.

Question 4)

a) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t} dt$.

b) Déterminez $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n)$. Interprétez ce résultat pour de « grandes » valeurs de n.

Problème 1

Question 1) L'urne contient initialement n boules, donc pour la vider, il faut et il suffit de procéder à n tirages de numéros impairs. Le dernier tirage est de numéro impair et entre ces n tirages, il y a $n-1$ tirages de numéros pairs, donc au total $2n-1$ tirages. On pose donc $N = 2n-1$.

Question 2)

a) La boule rouge est dans l'urne juste avant le tirage numéro k signifie qu'elle n'a pas été retirée lors des tirages de numéros impairs inférieurs ou égaux à k, donc $A_k = \overline{R_1} \cap \overline{R_3} \cap \ldots \cap \overline{R_{2j-1}}$ où $2j-1$ est le plus grand entier impair inférieur ou égal à k, autrement dit j est le plus grand entier tel que $j \leqslant \dfrac{k+1}{2}$, *i.e.* $j = \lfloor \dfrac{k+1}{2} \rfloor$.

b) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. L'événement A_{2i} est bien défini.
D'après ce qui précède, et d'après le formule des probabilités composées, on a donc
$P(A_{2i}) = \mathbb{P}(\overline{R_1}) P_{\overline{R_1}}(\overline{R_3}) \ldots P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_3} \cap \ldots \cap \overline{R_{2i-3}}}(\overline{R_{2i-1}})$
Les tirages d'une boule dans l'urne étant équiprobables, on a $\mathbb{P}(\overline{R_1}) = \dfrac{n-1}{n}$.
Pour tout $k \in [\![1, i-1]\!]$, si on suppose l'événement $\overline{R_1} \cap \overline{R_3} \cap \ldots \cap \overline{R_{2k-1}}$ réalisé, alors il y a eu k tirages impairs de boules blanches, donc l'urne contient 1 boule rouge et $n-1-k$ boules blanches, donc
$P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_3} \cap \ldots \cap \overline{R_{2k-1}}}(\overline{R_{2k+1}}) = \dfrac{n-1-k}{n-k}$
Donc $\mathbb{P}(A_{2i}) = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \dfrac{n-1-(i-1)}{n-(i-1)} = \dfrac{n-i}{n}$.
$\mathbb{P}(A_1) = 1$ (état initial) et pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, $A_{2i} = A_{2i+1}$ car comme le tirage numéro $2i$ s'effectue avec remise, l'état de l'urne juste avant le tirage $2i+1$ est le même que celui juste avant le tirage $2i$, donc $\mathbb{P}(A_{2i+1}) = \dfrac{n-i}{n}$.

Question 3) D'une part, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, le système $(A_{2i}, \overline{A_{2i}})$ est un s.c.e. donc d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(R_{2i}) = P_{A_{2i}}(R_{2i})\mathbb{P}(A_{2i}) + P_{\overline{A_{2i}}}(R_{2i})\mathbb{P}(\overline{A_{2i}})$.

Or $P_{\overline{A_{2i}}}(R_{2i}) = 0$ car si l'événement A_{2i} n'est pas réalisé, alors il n'y a pas de boule rouge dans l'urne lors du tirage $2i$.
Donc $\mathbb{P}(R_{2i}) = P_{A_{2i}}(R_{2i})\mathbb{P}(A_{2i}) = \dfrac{1}{n-i} \times \dfrac{n-i}{n} = \dfrac{1}{n}$.

D'autre part, $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{1}{n}$ et pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, le système $(A_{2i+1}, \overline{A_{2i+1}})$ est un s.c.e. donc d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(R_{2i+1}) = P_{A_{2i+1}}(R_{2i+1})\mathbb{P}(A_{2i+1}) + P_{\overline{A_{2i+1}}}(R_{2i+1})\mathbb{P}(\overline{A_{2i+1}})$.

Or $P_{\overline{A_{2i+1}}}(R_{2i+1}) = 0$ car si l'événement A_{2i+1} n'est pas réalisé, alors il n'y a pas de boule rouge dans l'urne lors du tirage $2i+1$. Donc $\mathbb{P}(R_{2i+1}) = P_{A_{2i+1}}(R_{2i+1})\mathbb{P}(A_{2i+1}) = \dfrac{1}{n-i} \times \dfrac{n-i}{n} = \dfrac{1}{n}$.

Question 4) Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. On a $B_{2i} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{2i} \overline{R_k}$, donc d'après la formule des probabilités composées,
$\mathbb{P}(B_{2i}) = \mathbb{P}(\overline{R_1})\mathbb{P}_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \ldots \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{2i-1}}}(\overline{R_{2i}})$.

— Pour tout $j \in [\![0, i-1]\!]$, si l'événement $\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{2j+1}}$ est réalisé, alors juste avant le $2j+2$-ème tirage, l'urne contient la boule rouge et $n-2-j$ boules blanches (il y a eu $j+1$ tirages de numéros impairs avant sans boule rouge), donc $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{2j+1}}}(\overline{R_{2j+2}}) = \dfrac{n-2-j}{n-1-j}$;
on a donc $P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \dfrac{n-2}{n-1}$, $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3}}(\overline{R_4}) = \dfrac{n-3}{n-2}$, etc

— De même, pour tout $j \in [\![1, i-1]\!]$, si l'événement $\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{2j}}$ est réalisé, alors juste avant le $2j+1$-ème tirage, l'urne contient la boule rouge et $n-1-j$ boules blanches (il y a eu j tirages de numéros impairs avant sans boule rouge), donc $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{2j}}}(\overline{R_{2j+1}}) = \dfrac{n-1-j}{n-j}$;
on a donc $\mathbb{P}(\overline{R_1}) = \dfrac{n-1}{n}$, $P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(\overline{R_3}) = \dfrac{n-2}{n-1}$, $P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3} \cap \overline{R_4}}(\overline{R_5}) = \dfrac{n-3}{n-2}$, etc

Pour alléger les notations, on note $p_k = P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_k}}(\overline{R_{k+1}})$, on a alors $\mathbb{P}(B_k) = \displaystyle\prod_{k=0}^{2i-1} p_k = p_0 \times \prod_{j=0}^{i-2} p_{2j+1}p_{2j+2} \times p_{2i-1}$.

Or d'après les calculs ci-dessus, $p_{2j+1}p_{2j+2} = \dfrac{n-2-j}{n-1-j} \times \dfrac{n-1-(j+1)}{n-(j+1)} = \dfrac{(n-2-j)^2}{(n-1-j)^2}$

Donc finalement on obtient $\mathbb{P}(B_{2i}) = \dfrac{n-1}{n} \times \displaystyle\prod_{j=0}^{i-2} \dfrac{(n-2-j)^2}{(n-1-j)^2} \times \dfrac{n-2-(i-1)}{n-1-(i-1)}$.

Le produit intérieur est un produit télescopique, il reste donc $\mathbb{P}(B_{2i}) = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{(n-i)^2}{(n-1)^2} \times \dfrac{n-1-i}{n-i} = \dfrac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)}$.

Question 5) Soit $i \in [\![0, n-1[\![$. On a évidemment $S_{2i+1} = B_{2i} \cap R_{2i+1}$, donc $\mathbb{P}(S_{2i+1}) = \mathbb{P}_{B_{2i}}(R_{2i+1})\mathbb{P}(B_{2i})$.

Si l'événement B_{2i} est réalisé, alors juste avant le tirage $2i+1$, l'urne contient la boule rouge et $n-1-i$ boules blanches (il y a eu i tirages de rang impair avant), donc $\mathbb{P}_{B_{2i}}(R_{2i+1}) = \dfrac{1}{n-i}$.

Donc $\mathbb{P}(S_{2i+1}) = \dfrac{1}{n-i} \times \dfrac{(n-i)(n-i-1)}{n(n-1)} = \dfrac{n-i-1}{n(n-1)}$.

Question 6) On note U l'événement « la boule rouge a été tirée une seule fois ».

Comme on vide l'urne, on est sûr de tirer au moins une fois la boule rouge. Si la première fois qu'elle est tirée, il s'agit d'un tirage de numéro pair, alors la boule rouge est remise dans l'urne donc elle sera retirée une fois suivante, puisqu'à la fin, l'urne est vide. Donc dans ce cas, elle n'est pas tirée une seule fois. Si la première fois qu'elle est tirée, il s'agit d'un tirage de numéro impair, alors la boule rouge est retirée de l'urne donc elle ne sera plus retirée ensuite, elle aura donc été tirée une seule fois.

On en déduit donc que $U = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n-1} S_{2i+1}$, cette union étant disjointe. Donc $\mathbb{P}(U) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2i-1} \mathbb{P}(S_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{n-i-1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1}(n-i-1) = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j = \dfrac{1}{n(n-1)} \times \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Problème 2

Question 1)

a) D'abord il est clair que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k l'événement « on obtient 'pile' au k-ème lancer ».
Alors si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\{X_n = k\} = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_k \cap P_{k+1}$: on suppose que les lancers sont indépendants, donc les événements $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ le sont,
donc $\mathbb{P}(X_n = k) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\overline{P}_i) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ puisque la pièce est supposée équilibrée.
Enfin, si $k = n$, alors $\{X_n = n\} = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_n$, donc de même $(X_n = n) = \dfrac{1}{2^n}$.

b) $2s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{(k-1)+1}{2^k}$
donc $2s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{k-1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{2^k} = \sum_{j=0}^{n-2} \dfrac{j}{2^{j+1}} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}$
donc $2s_n = s_n - \dfrac{n-1}{2^n} + 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} = s_n + 1 - \dfrac{n-1}{2^n} - \dfrac{2}{2^n} = s_n + 1 - \dfrac{n+1}{2^n}$.

c) $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{2^{k+1}} + \dfrac{n}{2^n} = s_n + \dfrac{n}{2^n}$ donc $E(X_n) = +1 - \dfrac{n+1}{2^n} + \dfrac{n}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

Question 2)

a) $B_{n,k} = \{X_n = k\} \cap B_n$, donc d'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(B_{n,k}) = \mathbb{P}_{X_n=k}(B_n) \times \mathbb{P}(X_n = k)$.
On connaît $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k}{2^{k+1}}$ et si l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé, alors l'urne contient k boules noires et une boule blanche, donc (avec l'hypothèse que les tirages sont équiprobables) $\mathbb{P}_{X_n=k}(B_n) = \dfrac{1}{k+1}$.
Donc $\mathbb{P}(B_{n,k}) = \dfrac{1}{(k+1)2^{k+1}}$.

b) De même, $\mathbb{P}(B_{n,n}) = \dfrac{1}{(n+1)2^n}$.

Question 3) $B_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} B_{n,k}$ (car les événements $\{X_n = k\}$ forment un système complet d'événements), donc $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \frac{1}{(n+1)2^n}$.

Question 4)

a) Par récurrence : soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt$.

Si $n = 1$, alors d'une part $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2}$ et d'autre part, $\ln 2 - \int_0^{1/2} \frac{t}{1-t}dt = \ln 2 + \int_0^{1/2} \frac{t}{t-1}dt$

$= \ln 2 + \int_0^{1/2} \frac{(t-1)+1}{t-1}dt = \ln 2 + \frac{1}{2} + \int_0^{1/2} \frac{1}{t-1}dt = \ln 2 + \frac{1}{2} + [\ln|t-1|]_0^{1/2} = \ln 2 + \frac{1}{2} + (\ln\frac{1}{2} - 0) = \frac{1}{2}$.

Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors d'une part, $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

D'autre part, $\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt = \int_0^{1/2} \frac{t^n(1-t)+t^{n+1}}{1-t}dt = \int_0^{1/2} t^n dt + \int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t}dt = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t}dt$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k2^k} = \ln 2 - \left(\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t}dt\right) + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln 2 - \int_0^{1/2} \frac{t^{n+1}}{1-t}dt$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $t \in [0, 1/2]$, on a l'inégalité $0 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant 2$, donc $0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt \leqslant \int_0^{1/2} 2t^n dt = \frac{1}{(n+1)2^n}$.

Donc d'après le th. d'encadrement, $\int_0^{1/2} \frac{t^n}{1-t}dt$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\mathbb{P}(B_n)$ tend vers $\ln 2$.

Quand n est « grand », on peut approcher $\mathbb{P}(B_n)$ par $\ln 2$, autrement dit quand on est prêt à attendre longtemps le premier lancer qui donne 'pile', on a environ 7 chance sur 10 de tirer la boule blanche.