VARIABLES ALÉATOIRES

* Exercice proche du cours ** Exercice de difficulté normale *** Exercice difficile (voire très difficile)

***1)** Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

On suppose que les tirages sont sans remise.

a) Déterminez la loi de B (resp. N) puis calculer $\mathbb{E}(B)$ et $\mathbb{V}(B)$ (resp. $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$).

b) Les variables B et N sont-elles indépendantes ?

***2)** Même exercice mais cette fois-ci les tirages sont avec remise.

***3)** Un distributeur automatique ne contient plus que 6 canettes à 1 euro : 2 de jus d'orange et 4 d'un cola immonde. Malheureusement, il est détraqué : on a beau choisir une boisson, il donne une canette au hasard.

a) André déteste le cola et a très soif. Il serait prêt à payer jusqu'à obtenir un jus d'orange. Soit X la somme qu'il dépenserait. Explicitez la loi de X. Combien d'euros peut-il espérer payer pour sa canette de jus d'orange ?

b) Finalement André renonce. Basile, qui aime son prochain ou qui est atteint d'un curieux trouble, veut supprimer toute inconnue dans ce distributeur : il paye Y fois 1 euros jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul type de canette dans le distributeur. Explicitez la loi de Y, son espérance et son écart-type.

c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

****4)** On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la var "nombre de tirage effectués". Déterminez la loi de X, calculez son espérance et sa variance.

****5)** On tire simultanément r jetons d'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n ($r \leqslant n$). On note $X_{n,r}$ la v.a.r. égale au maximum des r numéros obtenus.

a) Donnez les lois des variables $X_{3,2}$, $X_{4,2}$, $X_{4,3}$.

b) Déterminez la loi de $X_{n,r}$ pour n et r quelconques avec $r \leqslant n$.

c) Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.

****6)** On tire, au hasard et sans remise, 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit R le nombre de rois obtenus. Un jeu consiste à miser 2 euros et à recevoir $a > 0$ euros par roi obtenu. Soit G la variable aléatoire égale au gain en euro.

a) Déterminez la loi de R et son espérance.

b) Exprimer G en fonction de R et de a et calculer l'espérance de G.

c) Pour quelles valeurs de a le jeu est-il favorable au joueur ?

d) Donnez la loi de G.

****7)** Dans une loterie, on présente 25 bouteilles de champagne dont deux seulement sont pleines et valent 30 euros chacune. Un joueur choisit un entier n entre 1 et 25, mise $0,2\,n^2$ euros et choisit ensuite n bouteilles. On note B_n le nombre de bouteilles qu'il va pouvoir déguster.

a) Déterminez la loi de B_n, son espérance et sa variance.

b) Quelle valeur de n le joueur a-t-il intérêt à choisir pour maximiser son espérance de gain ?

****8)** Initialement, une urne A contient 2 jetons numérotés 0 et une urne B contient deux jetons numérotés 1. À chaque coup, on échange un jeton pris dans A au hasard et un autre jeton pris dans B au hasard. X_n désigne le nombre de jetons 1 dans l'urne A après n échanges. Déterminez la loi de X_n.

****9)** n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

a) Justifiez que $N(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

b) On note B_i le numéro de la boule tirée au i-ème tirage.
Montrez que pour $k \geqslant 2$, $\{N \geqslant k+1\} = \{N \geqslant k\} \cap \big\{B_k \notin \{B_1, \dots, B_{k-1}\}\big\}$.

c) Que vaut $\mathbb{P}(N \geqslant 2)$? Donnez une relation de récurrence entre $\mathbb{P}(N \geqslant k+1)$ et $\mathbb{P}(N \geqslant k)$.

d) Montrez que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(N \geqslant k+1) = \dfrac{A_n^k}{n^k}$.

e) Déduisez-en $\mathbb{P}(N = k)$.

f) Montrez que l'espérance de N est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$.

****10)** Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = \dfrac{1}{4}$.

a) Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a un subi. Déterminez la loi de X, calculez son espérance et sa variance.

b) On considère un ensemble de 8 clients différents. Deux d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Déterminez la loi de M et calculez son espérance.

****11)** Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires en nombres respectifs b_1 ; n_1 ; b_2 ; n_2 non nuls. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule obtenue dans son urne d'origine.

Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le deuxième tirage se fait dans U_1 (resp. U_2) : au i-ème tirage, si la boule obtenue est blanche (resp. noire), le $(i+1)$-ème tirage se fait dans U_1 (resp. U_2) :

On considère la variable aléatoire X_i définie par : $X_i = 1$ si l'on obtient une boule blanche au i-ème tirage et $X_i = 0$ sinon.

a) Donner la loi de X_1 puis de X_2.

b) Calculer $\mathbb{P}(X_{i+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_i = 0)$ et $\mathbb{P}(X_i = 1)$. Faites de même avec $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)$.

c) Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X_i = 0))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Déduisez-en l'expression de $\mathbb{P}(X_i = 0)$ en fonction de i puis celle de $\mathbb{P}(X_i = 1)$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(X_i = 0)$ et $\displaystyle\lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(X_i = 1)$.

****12)** On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3 ; 4 ; 5 et 6. On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

a) Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?

b) Quelle est la loi de X_1 ? Calculez son espérance mathématique $\mathbb{E}(X_1)$.

c) Déterminez la loi de X_2.

d) Dans le cas général, quelles sont les valeurs possibles de X_n ?

e) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 6) = \dfrac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 5)$

$\forall k \in \{1, \dots, 5\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{7-k}{6}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \dfrac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n = k+1)$

f) Déduisez-en pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$

Calculer alors $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

***13)** Un sac de billes contient $n-1$ billes blanches et une bille noire ($n \geqslant 1$). On tire successivement et sans remise toutes les billes. On désigne par X le rang du tirage de la bille noire.

Déterminez la loi de X, rappelez son espérance et sa variance.

****14)** Jean-Eudes part en voyage d'études. Il promet à ses parents de téléphoner tous les jours. Le premier jour, il téléphone effectivement. Mais, s'il téléphone un jour, il oublie une fois sur 2 le lendemain. Si en revanche, il a oublié de téléphoner un jour donné, il oublie de le faire seulement une fois sur quatre le lendemain.

En un mois, combien de fois aura-t-il téléphoné en moyenne ?

****15)** Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement n boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne a points, sinon il en perd 1 point. Soit X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de points obtenus.

Déterminez la loi de X_n, puis $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Exprimez Y_n en fonction de X_n. Déduisez-en la loi de Y_n, puis $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$. Pour quelles valeurs de a le jeu est-il favorable au joueur ?

****16)** Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0; 1; 2; \dots; n; \dots$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.

a) Donnez la loi de Y_n, $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

b) Exprimez X_n en fonction de Y_n et n. Déduisez-en $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$, puis la loi de X_n.

c) Soit Z_n la v.a. égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n.

▷ Déterminez $Z_n(\Omega)$.

▷ Montrez que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout $k \geqslant 1$: $\mathbb{P}(Z_n = k) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(Z_{n-1} = k-1) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(Z_{n-2} = k-1)$

▷ Déduisez-en une relation entre l'espérance de Z_n, Z_{n-1} et Z_{n-2} pour $n \geqslant 2$.

▷ On pose $u_n = \mathbb{E}(Z_n) - na$. Déterminer un réel a tel que la suite u soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Déduisez-en $\mathbb{E}(Z_n)$.

****17)** On relie au hasard deux à deux n points distincts $A_1, A_2, \dots, A_n$ sur un cercle. Deux points différents A_i et A_j sont reliés avec une probabilité p.

a) M désigne le nombre de liaisons obtenues. Déterminez sa loi. Combien y a-t-il de liaisons en moyenne ?

b) N désigne le nombre de triangles obtenus. Combien y a-t-il de triangles en moyenne ? (question supplémentaire dans l'énoncé initial : déterminez la loi de N...???)

****18)** Soit X une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.

a) On définit une nouvelle v.a.r Y par $Y = \dfrac{1}{1+X}$. Calculez $\mathbb{E}(Y)$.

b) On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$ et $a > 0$. Calculez l'espérance de $Z = a^X$.

****19)** Soit X une v.a. telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On note G_X la fonction polynômiale qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)t^k$.

a) Exprimez $G_X(1)$, $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.

b) Retrouvez ainsi espérance et variance d'une loi binomiale.

***20)** Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in]0,1[$, sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

a) Déterminez la loi conjointe de U et V, ainsi que leur covariance.

b) Sont-elles indépendantes ?

***21)** Quatre cartes numérotées de 1 à 4 sont posées faces cachées sur une table. On retourne deux cartes au hasard (sans remise) et on note X le plus petit numéro tiré et Y le plus grand.

a) Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.

b) En déduire la loi de $X + Y$.

***22)** On lance un dé à 6 faces équilibré, et on note X le nombre obtenu. On choisit ensuite au hasard un nombre entier entre 1 et X, que l'on note Y.

a) Soit $i \in [\![1, 6]\!]$. Quelle est la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$?

b) Déterminez la loi conjointe du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y.

c) Déterminez la loi de X sachant que $\{Y = 2\}$.

***23)** On lance trois pièces équilibrées et on note X le nombre de piles obtenus. Soit Y la variables aléatoires qui vaut 1 si on a obtenu plus de faces que de piles, 0 sinon.

a) Donnez la loi du couple (X, Y)

b) Calculez leur covariance, et leurs écart-types.

***24)** Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}([\![0, 3]\!])$ et soit $Y = (X-1)^2$.

a) Déterminez la loi conjointe de X et Y.

b) Calculez la covariance de X et Y ainsi que le coefficient de corrélation linéaire.

***25)** Soit $X \sim \mathscr{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = X^2$.

a) Déterminez la loi du couple (X, Y) ainsi que les lois marginales.

b) Calculez la covariance de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

****26)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soient T une v.a. qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ et Y une v.a. à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) = p$. On suppose que T et Y sont indépendantes et on pose $X = T - n$ et $Z = XY$.

a) Les v.a. X et T sont-elles indépendantes ? Et X et Y ?

b) Déterminez $Z(\Omega)$ et exprimez la loi de Z en fonction de celles de X et de Y.

c) Déduisez-en que X et Z ont même loi.

d) X et Z sont-elles indépendantes ?

e) Calculez l'espérance de Z.

****27)** Soit un jeu de $2n$ cartes ($n = 17$ ou 27) qui contient deux jokers. On joue au jeu suivant :

▷ On retourne les cartes une à une jusqu'à obtenir le premier joker

▷ Après le premier joker, à chaque fois que l'on retourne une carte, le joueur paie un euro.

▷ dès que le deuxième joker est retourné, le joueur gagne a euros et arrête de jouer.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de cartes retournées pour obtenir le premier joker, et Y pour le deuxième.

a) Montrez que si $1 \leq i < j \leq 2n$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

b) Donner la loi du couple (X, Y), puis les lois de X, Y et $Y - X$.

c) Calculez $\mathbb{E}(X)$.

d) Déterminer la valeur de a pour laquelle la partie est équilibrée.

****28)** Un standard téléphonique effectue n appels téléphoniques vers n personnes distinctes ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $p \in]0,1[$, indépendamment de ce qui se passe pour les autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

a) Déterminez la loi de X, son espérance, et sa variance.

b) Après ces n appels, le standard tente une deuxième fois, dans les mêmes conditions, de contacter les $n - k$ correspondants injoignables la première fois. Soit Y le nombre d'appels aboutis lors de cette deuxième tentative, et $Z = X + Y$.

(i) Déterminez la loi de Y sachant $\{X = k\}$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire la loi conjointe de X et Y.

(ii) Montrez que Z suit une loi binomiale que l'on précisera.

****29)** n candidats passent le code. La probabilité de réussite de chaque candidat est p. Si un candidat rate l'examen, il tente sa chance une deuxième fois avec la même probabilité de réussite.

On note X le nombre de candidats ayant réussi au premier coup et Y le nombre de candidats ayant réussi avec 2 tentatives.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Que peut-on dire de $\mathbb{P}_{\{X=k\}}(Y = i)$?

c) On note Z le nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves. Quelle est la loi de Z ?

****30)** Dans une ville, une proportion p de la population est atteinte par un virus contagieux. Si une personne saine est en contact avec une personne contaminée, il y a 2 chances sur 3 qu'elle soit elle-même contaminée. Un représentant commercial (en parfaite santé) décide de rendre visite à n habitants de cette ville.

a) Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades rencontrés par le représentant. Quelle est la loi de N ?

b) Quelle est la probabilité que le représentant soit contaminé à l'issue de sa tournée ?

****31)** Soit (X_n) une suite de variables de Bernoulli de même paramètre p, indépendantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnez la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

b) Déterminez la loi conjointe du couple (Y_n, Y_{n+1}) et calculez $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n+1})$.

c) Déterminez pour tout n et pour tout $k \geqslant 2$ la loi conjointe de (Y_n, Y_{n+k}). Les variables Y_n et Y_{n+k} sont-elles indépendantes ?

d) Calculez $\mathbb{E}(T_n)$, puis exprimez $\mathbb{V}(T_n)$ en fonction des variances $\mathbb{V}(Y_i)$ et des covariances $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j)$ et calculez-la.

e) On pose $Z_n = \dfrac{T_n}{n}$. Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|Z_n - p^2|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

****32)** Soit n urnes numérotées U_1, U_2, ..., U_n. L'urne U_i contient une boule blanche et i boules noires. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on note S la variable aléatoire qui donne le nombre de boules blanches tirées. Calculez $\mathbb{E}(S)$.

****33)** Soit N un entier naturel, t un réel. On pose $f(t) = \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant N \\ \ell \text{ pair}}} \binom{N}{\ell} t^\ell$ et $g(t) = \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant N \\ \ell \text{ impair}}} \binom{N}{\ell} t^\ell$

a) Que vaut $f(t) + g(t)$? $f(t) - g(t)$? Déduisez-en les valeurs de $f(t)$ et $g(t)$.

b) En particulier, que vaut la somme $\sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant N \\ \ell \text{ pair}}} \binom{N}{\ell}$?

Soit n un entier naturel non nul. Une boîte contient $(2n + 1)$ jetons bicolores (une face est blanche, l'autre est noire). Les jetons sont numérotés de 1 à $2n + 1$ sur leur face blanche, les faces noires ne portant pas de numéro.

On lance simultanément tous les jetons et on observe leurs faces supérieures. Une et une seulement des deux couleurs apparaît un nombre impair de fois. Soit X la variable aléatoire associée à ce nombre.

d) Déterminez la loi de X.

e) Calculez son espérance et sa variance.

Suite au lancer, on ramasse les jetons de la couleur apparaissant un nombre impair de fois et on note les numéros de leur face blanche. Soit Y la variable aléatoire représentant le plus petit de ces nombres.

f) Soit $k \in [\![0, n]\!]$, déterminez la loi conditionnelle de Y, conditionnée par l'événement $(X = 2k + 1)$.

g) Déduisez-en la loi de Y. Calculez son espérance.

****34)** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, prenant un nombre fini de valeurs, de même espérance m et de même écart type σ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n}$.

a) Déterminez $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et $\lim_{n \to +\infty} \sigma(T_n)$. Quelle interprétation peut-on donner de ces limites ?

b) Montrez que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|T_n - m| \geqslant \varepsilon) = 0$.

c) On souhaite déterminer la proportion de la population française qui mange bio régulièrement. Montrez comment un sondage permet d'éviter d'interroger toute la population.

*****35)** [Inégalité de Bernstein] Soit $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $x > 0$ et $q = 1 - p$.

a) Soit $\lambda > 0$. Montrez que $\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}$.

b) Montrez que $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)}) = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$.

c) Montrez que, pour tout réel t, $e^t \leqslant e^{t^2} + t$. En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant e^{n(\lambda^2 - \lambda x)},$$

puis que

$$\mathbb{P}(S_n - np \geqslant nx) \leqslant e^{-nx^2/4}.$$

d) Comment démontrerait-on de la même façon que

$$\mathbb{P}(S_n - np \leqslant -nx) \leqslant e^{-nx^2/4}.$$

En déduire l'inégalité de Bernstein :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant x\right) \leqslant 2e^{-\frac{nx^2}{4}}.$$